$\vec{A}$：ベクトル場
Cが閉経路、SがCに囲まれる曲面
があるとよいが なくても○にする

$\nabla^2 f = 2+2+2 = 6$

2015 過去問（電磁気A）

1 (1). $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$，$\cancel{\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

(2). $\nabla \cdot \vec{A} = 1$，$\nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3). (a) $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(b). $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f)$

$\Leftrightarrow \quad 2 = 0$ （矛盾）

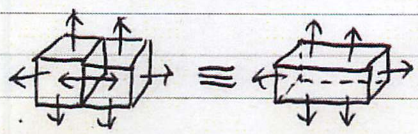
よって、これを満たす f は存在しない。

単に「$\mathrm{rot}\,\vec{A} \neq 0$ なので」で十分.

(4). (b) $\nabla \times \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$ ■

(c) $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0.$ ■

(5). (a). $\underbrace{\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}}_{\text{内部から放たれる量の合計}} = \underbrace{\int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\, dV}_{\text{湧き出しの合計}}$



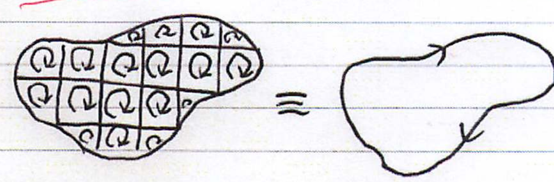
V中の湧き出しを微小部分について足し合わせると、となりあう部分は積分が打ち消し合い、表面での積分のみが残る。

なくてもよい

$\vec{A}$：ベクトル場　S：閉曲面
V：Sで囲まれる領域

があった方がよいが なくても○

(b). $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{A}\, d\vec{S}$



S中の微小部分についてのうずを足しあわせると、隣りあう部分は消し合い、外周を積分するのと同じになる。

なくてもよい

(6). $\vec{r} := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$

$\therefore \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$

$= \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = \underline{2\pi}$

(7). ファラデーの法則.

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} d\vec{S}$

ストークスの定理より,

$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{V} = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} d\vec{S}$

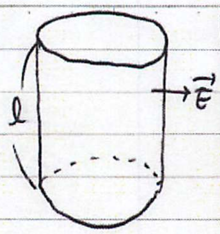
∴ 経路を一周したときの起電力が $\int_S -\frac{\partial B}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$ となる。

全微分公式より $\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_C \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$

$= -\int_C d\phi = \phi(\vec{r_1}) - \phi(\vec{r_2})$

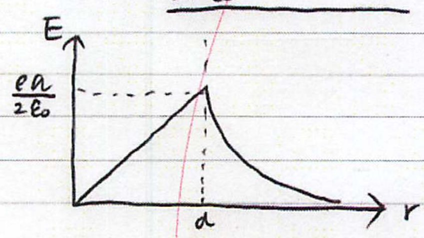
がbetter

2. (1). $E\cdot \cancel{l}\cdot 2\pi \cancel{r} = \frac{\pi r^{\cancel{2}} \cancel{l}\cdot\rho}{\varepsilon_0}$



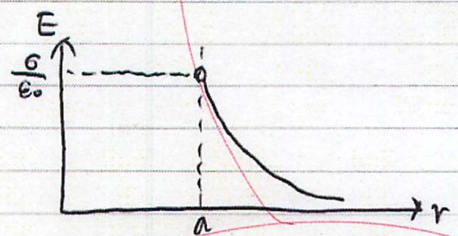
$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \quad (r<a)$$

$$E = \frac{a^2\rho}{2r\varepsilon_0} \quad (r>a)$$



(2). $2\pi r l\cdot E = 2\pi l a \sigma \quad \therefore E = \frac{a}{r\varepsilon_0}\sigma \ (r>a)$

$E = 0 \ (r<a)$



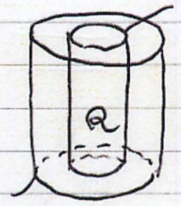
(3). $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ より、

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = 0$

$\therefore \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \phi$ は経路によらない。■

ロジックが少し変

(4). $\frac{Q}{\varepsilon_0} = E\cdot 2\pi r\cdot L$



$\therefore E = \frac{Q}{2\pi r L\varepsilon_0}$

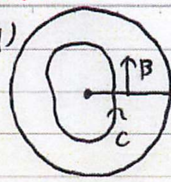
$\int_a^b E\,dr = \int_a^b \frac{Q}{2\pi r L\varepsilon_0}dr$

$V = \frac{Q}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2\pi L}\cdot\log\frac{b}{a}$

$\therefore Q = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\log\frac{b}{a}}V$

$$\therefore C = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3 (1)

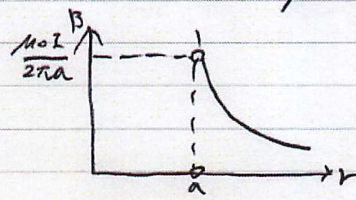


Bの向きは円筒の接線方向。

内部の閉経路Cをとると、
Cの内部に電流はないので、
アンペールの法則より、$B=0$ ■

(2). $r>a$ のとき、

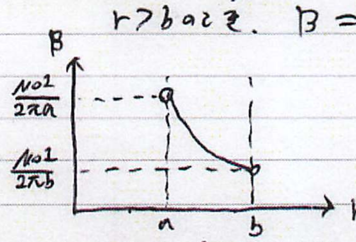
$2\pi r B = \mu_0 I \quad \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



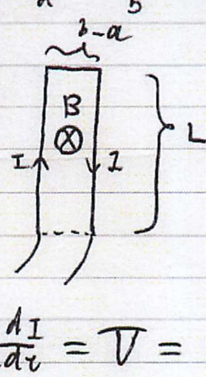
(3). $a<r<b$ のとき、

$2\pi r B = \mu_0 I \quad \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r>b$ のとき、$B=0$.



(4).



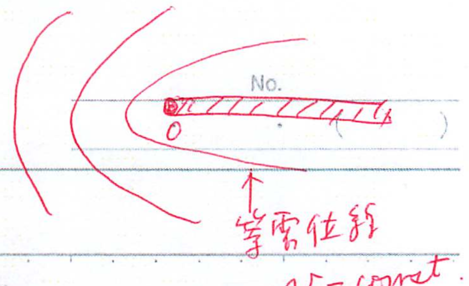
$-L_I\frac{dI}{dt} = V = -\frac{d\Phi}{dt}$

$\therefore \Phi = I\cdot L_I$

$\int_a^b \frac{\mu_0 \cancel{I}}{2\pi r}\cdot L\,\cancel{(b-a)}\,dr = \cancel{I} L_I$

$$L_I = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot L\log\frac{b}{a}$$

図



(4).

(1). $\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$.

$Q = -CL\ddot{Q}$

$\frac{1}{\sqrt{CL}}$

∴ $Q = A\cdot\cos\sqrt{CL}\,t$

t=0のとき $Q_0 = A\cdot 1$

∴ $\underline{Q = Q_0\cos\sqrt{CL}\,t}$

∴ $\underline{I = -Q_0\sqrt{CL}\sin\sqrt{CL}\,t}$

(2). $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\end{cases}$

ここで、 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

より、 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

∴ $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ■

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial y}\\ -\frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$= 0$ (vとuは直交)

vは電位であり、電位と直交するものは電気力線である。■

$w = Az^{\frac{1}{2}} \rightarrow w^2 = A^2 z$.

$u^2 - v^2 + i\cdot 2uv = A^2(x+yi)$

∴ $\begin{cases}u^2 - v^2 = A^2 x\\ 2uv = A^2 y\end{cases}$

∴ $y^2 = \frac{4v^2}{A^4}(A^2 x + v^2)$

「これが $u(x,y) = C_1$ の曲線の法線方向を向くこと」の~~指~~指摘が必要

$v = v_0$ のとき、

$\underline{y^2 = \frac{4v_0^2}{A^4}(A^2 x + v_0^2)}$

~~(3)~~ ここで、$v_0 = 0$ とすると、

$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ $(x \geq 0)$

また、~~y=0のとき $x = -\frac{v_0^2}{A^2}$ なので、(xx~~

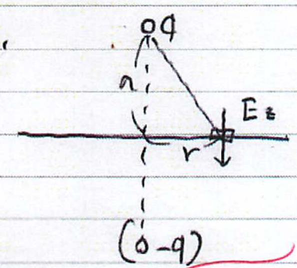
$x \leq 0$.

不要

さらに、$v_0 \to \infty$ のとき $y \to \infty$ より、$y=0$, $x>0$ の領域は すいこみを表している(電荷は負)

これらの考察より、$w = Az^{\frac{1}{2}}$ 型の複素速度ポテンシャルは、$y=0$, $x>0$ に電荷負の金属板があるときの状態を表していると分かる。■

(3).



2

$E_z = \frac{\cancel{2q}\,q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+a^2)}\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$

またガウスの定理より、

$-E_z\cancel{\cdot 2}\cancel{dxdy} = \frac{\sigma(x,y)\,dxdy}{\varepsilon_0}$

$\underline{\sigma(x,y) = -\frac{2qa}{4\pi(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}}$

問題 4(2) 補足.
$z = x + iy$, $w = u + iv$ として、変換式 $w = Az^{1/2}$ より $w^2 = A^2 z$ は

$$(u + iv)^2 = A^2(x + iy) \quad \rightarrow \quad u^2 - v^2 + 2iuv = A^2 x + iA^2 y$$

実部と虚部を比較することで、

$$A^2 x = u^2 - v^2, \quad A^2 y = 2uv$$

両式より v を消去した式と u を消去した式は

$$y^2 = \frac{4u^2}{A^2}\left\{\left(\frac{u}{A}\right)^2 - x\right\}, \quad y^2 = \frac{4v^2}{A^2}\left\{x + \left(\frac{v}{A}\right)^2\right\}$$

これは x 軸を対称軸とする放物線の方程式である。第二式は $v \to 0$ とすると x 軸上で $x \leq 0$ の半直線となるので、これは半無限導体面に対応する。つまり第二式は等電位面の群 (v をいろいろと変化させると異なる電位の等電位面を生成する) を表す。また第一式は常に第二式の放物線と直交しているので、これは電気力線を表すことがわかる。