電磁気学 A(加藤担当) レポート No. 2, No. 3 の略解と補足　第 8 講配布 (2016.11.30)

要望があったので、レポート No. 2, No. 3 の解答を配布します。

No.2 の問題 1. (a) $\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

最後の等式では偏微分の順番を変えても結果が変わらないことを用いた。

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ とすると、$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$. これより

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.$$

最後の等式では偏微分の順番を変えても結果が変わらないことを用いた。

No.2 の問題 2. ベクトル場は $\vec{A} = (-y, x, 0)$ である。

(a) C_1 を媒介変数表示すると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le \pi/2)$. これより

$$\int_{\mathrm{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}_1} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_0^{\pi/2} (A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt} + A_z \frac{dz}{dt})dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left((-\sin t)\frac{d}{dt}(\cos t) + (\cos t)\frac{d}{dt}(\sin t) + 0 \right) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

(b) C_2 を媒介変数表示すると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$. これより

$$\int_{\mathrm{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left((-t)\frac{d}{dt}(1-t) + (1-t)\frac{d}{dt}(t) + 0 \right) dt = \int_0^1 (t + 1 - t)dt = 1.$$

(c) C_3 の媒介変数表示は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ の和.

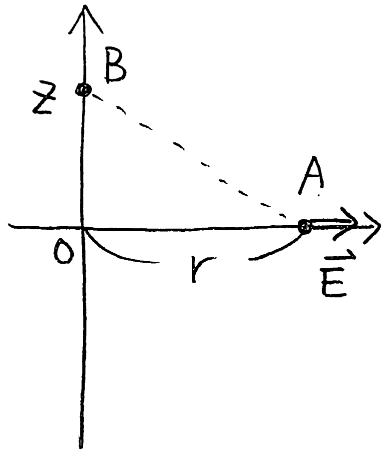
$$\int_{\mathrm{C}_3} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-0) \times \frac{d}{dt}(1-t)dt + \int_0^1 0 \times \frac{d}{dt}(t)dt = 0.$$

No.3 の問題 1. 問題の図の円柱にガウスの法則を適用すると、$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \times 2\pi r h = (\lambda h)/\epsilon_0$.
これより $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$.

No.3 の問題 2. 問題の図の直方体にガウスの法則を適用すると、$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \times 2S = (\sigma S)/\epsilon_0$.
これより $E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (結局、電場は面からの距離には依存しなくなる).

眠れぬよるのために. 裏面.

問題1



点Aに点B付近の長さΔzの範囲の電荷が作る電場$\Delta\vec{E}$は

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}_A-\vec{r}_B}{|\vec{r}_A-\vec{r}_B|^3}\lambda\Delta z$$

よって

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{1}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

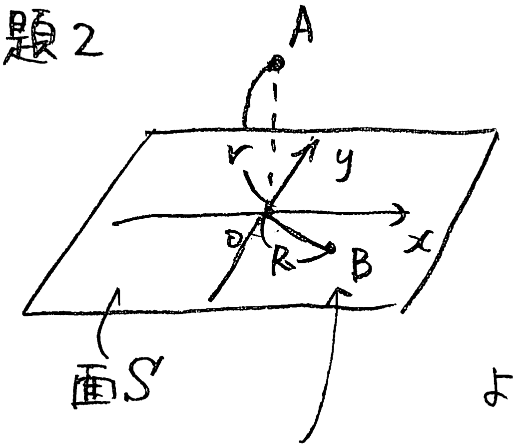
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{\infty}dz\,\frac{1}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} 2r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$z = r\tan\theta$ ↓

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r/\cos^2\theta}{r^3(1+\tan^2\theta)}d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題2



$B(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$
極座標表示

$\Delta S = R\Delta\theta\Delta x$

点Aに面上の点B付近の面積ΔS内の電荷が作る電場$\Delta\vec{E}$は

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}_A-\vec{r}_B}{|\vec{r}_A-\vec{r}_B|^3}\sigma\Delta S$$

よって

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{1}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ r \end{pmatrix}dS$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}dR\int_0^{2\pi}d\theta\,R\frac{1}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}dR\,\frac{R}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi r \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\times\int_0^{R}\frac{R\,dR}{(r^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+R^2}}\right]_0^{\infty} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$