

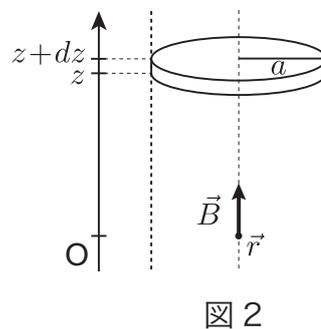
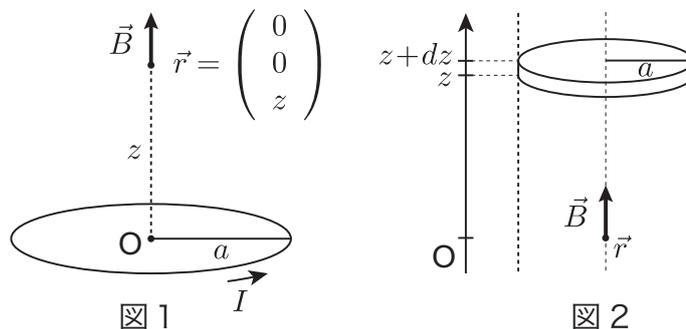
問題. 経路 C に沿って電流 I が流れているとき、磁場 \vec{B} はビオ・サヴァールの法則

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1)$$

によって決まる (μ_0 は真空の透磁率)。この法則を利用して、以下の問に答えよ。

(1) 図 1 のように原点 O を中心とし xy 平面におかれた半径 a の円電流 I がある。この円電流が位置 $\vec{r} = (0, 0, z)$ につくる磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ を求めよ。対称性より \vec{B} は z 成分しかないので、 B_z だけ求めればよい。ヒント：円上の位置 \vec{r}' を変数 θ によって媒介変数表示し、 \vec{r}' についての線積分を θ に関する積分に書き直せ。 $d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}'}{d\theta} d\theta$ に注意。

(2) 単位長さあたりの巻数が n 、半径 a の十分長いソレノイドに電流 I を流したとき、ソレノイドの中心軸上での磁場 \vec{B} をビオ・サヴァールの法則から求めよ。ヒント：図 2 のように z から $z + dz$ にあるソレノイドの一部 (=円電流) が位置 $\vec{r} = (0, 0, 0)$ における磁場は、(1) の解答において I をこの区間にある電流にし、 z を $-z$ に置き換えたものである。これを $z = -\infty$ から $z = \infty$ まで積分せよ。



眠れぬ夜のために (成績とは無関係) 1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2)$$

の一般解 $\phi(x, t)$ は任意の関数 $f(x)$, $g(x)$ によって $\phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ と書けることを示せ。(ヒント：方程式を新しい変数 $u = x - ct$, $v = x + ct$ によって書き直す。)

(アンケート) これが最後のレポートです。講義も来年あと一回で終わりです(補講はやめました)。一学期間おつきあいいただき、ありがとうございます。例によって、講義に関する疑問や感想を自由に書いてください。講義全体を振りかえって何か書いていただけるとありがたいです。こういう話が面白かった、印象深かった、などの感想をいただけると励みになります。アンケートはホームページ (<http://kato.issp.u-tokyo.ac.jp/kato>) に掲載したいと思います。掲載がいやな人はそのようにかいてください。

前回のレポートに関する補足

第4回レポートの問題2.(1)に苦戦した人が多かったようです。特に図2(a)にかいた経路 C_2 についてアンペールの法則を適用することで、 $B_x = 0$ を結論するのが難しかったようです。問題文もこの辺はごまかして書いてあり、時間をかけさせてしまって申し訳ないです。このプリントで簡単に補足します。第4回レポートの問題を見ながら読んでください。

平板は十分広いので、磁場 \vec{B} は x, y によらず z のみの関数になり、 $\vec{B}(z) = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$ と書ける。まず、磁場の z 成分から考えよう。 \vec{B} が z のみによるので、

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \rightarrow \quad B_z = \text{const.} \quad (3)$$

また、平板についての鏡像対称性から、 $B_z(-z) = -B_z(z)$ が成り立つはずである。この2つの条件を同時に満たすには $B_z = 0$ しかありえないので、まず磁場の z 成分はゼロである。次に経路 C_2 でアンペールの法則を適用する。磁場の z 成分はないので、 C_2 についての線積分の内、有限になりうるのは x 方向に動く部分(長さ L とする)のみであり、

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = (B_x(z_1) - B_x(z_2)) \times L \quad (4)$$

となる。ここで z_1 は経路 C_2 で x 正方向に動く部分の z 座標、 z_2 は経路 C_2 で x 負方向に動く部分の z 座標である。また経路 C_2 を貫く電流はゼロなので、上記の線積分はゼロとなり、その結果 $B_x(z_1) = B_x(z_2)$ となる。 z_1, z_2 は任意にとれるので、結局、 $B_x(z) = \text{const.}$ である。ここで、 B_x の値は平板を流れる電流と無関係であることに注意する。平板に流れる電流が0のときにも磁場があるのは不合理であるので、結局 $B_x(z) = 0$ が結論される。なお、この最後のロジック(平板を流れる電流がゼロなら磁場はないはず)は、経路 C_1 でアンペールを使って B_y の値を出すときにもさりげなく利用している(そこを悩んでいる人は少数派でしたが)。

ポアソン方程式の一意性定理の証明

授業では省いていた一意性定理の証明を簡単にまとめる。ポアソン方程式を

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

とする。境界条件は「十分遠方にとられた閉曲面 S 上で $\psi(\vec{r}) = 0$ 」とする。もし解が2つあったとすると、それを $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)$ としたとき、その差 $\phi(x, y, z) = \psi_1(x, y, z) - \psi_2(x, y, z)$ は、 $\nabla^2 \phi = 0$ を満たす。一方、 $\vec{A} = \phi \operatorname{grad} \phi$ にガウスの定理を適用すると、

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad (6)$$

となる(V は閉曲面 S の内部の領域)。左辺は境界条件からゼロ。さらに

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi) = \phi \nabla^2 \phi + (\operatorname{grad} \phi)^2 = (\operatorname{grad} \phi)^2 \quad (7)$$

が示せる(二番目の等式では $\nabla^2 \phi = 0$ を使った)。以上より、 $\int_V \operatorname{div}(\phi \operatorname{grad} \phi) dV = 0$ 。被積分関数は0以上なので、この式が成立するのは $\operatorname{grad} \phi = 0$ のときのみ。これより $\phi = \text{const.}$ さらに境界条件から、この定数はゼロで、 $\phi = 0$ 。これは異なる解 $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)$ が存在することと矛盾。証明終。