(常識 1) ベクトルの外積について

ベクトルの外積に馴染みがない人のために、最低限の知識をまとめる。

$$(\text{定義})\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{のとき、} \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

このベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は以下の様なベクトルである。

- $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き: $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に直交し、向きは右ねじで決める (図 1)。
- $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさ: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = (\vec{a}, \vec{b}$で張られる平行四辺形の面積).

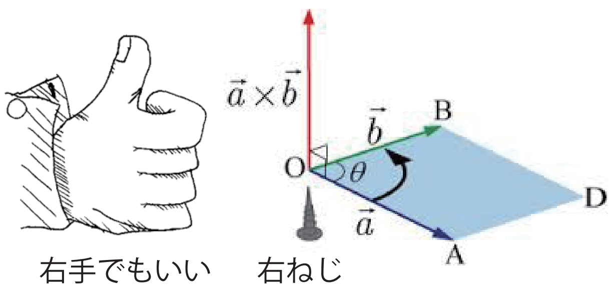

図 1: ベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き

証明：(向き) 実際に成分表示を使って $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ を示せばいい。(大きさ) 下記のような変形による。

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \end{aligned}$$

その他の性質としては、下記のようなものがある。

- 分配法則: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 定数倍: $\vec{a} \times (k\vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = k\vec{a} \times \vec{b}$ (k は定数)
- 交換則: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

これらの式は、成分表示による計算によって簡単に確かめることができる。まとめると、ベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ はあたかも掛け算のように取り扱っていいが、掛ける順番をひっくり返すときに負号をつけないといけない点だけに注意する。

(常識 2) 全微分公式の証明

講義では全微分公式は知っていることを前提にする。忘れてしまった人のために、証明の概略を示す。ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ についての全微分公式を示す (3 変数関数は推して知るべし)。

$$(\text{全微分公式}) \qquad df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

(証明) 関数 $z = f(x,y)$ を考えると、これは (x,y,z) 空間中の曲面を表す (図 2 左)。ある点 (x,y) 近傍の曲面を切り出すと (図 2 右)、(x,y) のごく近傍では曲面は平面にみえる。x 方向に dx だけ動くときの f の変化は、そのときの変化率 (偏微分の定義より $\frac{\partial f}{\partial x}$) と移動距離 dx の積 $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ でかける。同様に y 方向に dy だけ動くときの f の変化は $\frac{\partial f}{\partial y}dy$。よって dx, dy が微小で、その範囲で曲面が平面によく近似できるときは、$df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$ は x 方向に dx, y 方向に dy 変化させたときの f の変化の「和」となる (図 2 右)。ゆえに全微分公式が示された。

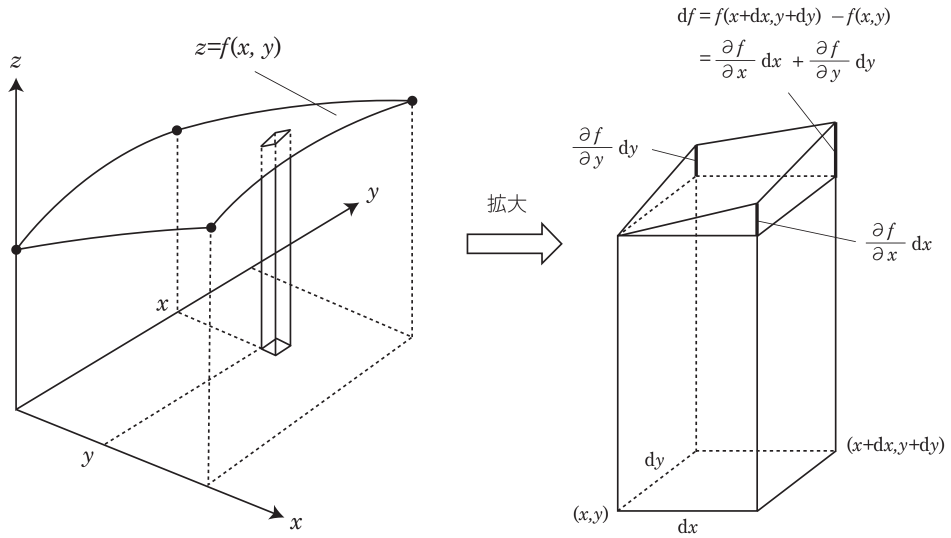

図 2: 全微分公式の証明のための図

参考文献

講義では特に教科書は指定しないが、各自参考書を購入して復習に利用することを薦める。易しめの教科書としては、長岡洋介著「電磁気学 I」「電磁気学 II」およびその演習書「例解電磁気学演習」（すべて岩波書店・物理入門コース）を挙げておく。「ファインマン物理学」の第３巻の電磁気学も味わいがあってよい。将来物理学科に進みたい人は、本格的な教科書として砂川重信著「電磁気学」「電磁気学の考え方」（ともに岩波書店）、和田浩一著「電磁気学の基礎１・２」（東京大学出版）などを買ってもいいかもしれない。究極的な本格書としては砂川先生著「理論電磁気学」（紀伊國屋書店）だが、おそらく１年生には難しいだろう。ここで挙げたものは私の手元にあるものだけだが、他にもよい教科書はたくさんある。書店で立ち読みをして、自分に合いそうなものを選ぶと良い。無理して背伸びをする必要はないです。