電磁気学 A(加藤岳生担当) 補充プリント No.4　第 12 講配布　(2017.1.11)

# オイラーの公式

ここではオイラー公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1}$$

の証明の概略を説明する ($e$ は自然対数の底, $i$ は虚数)。この公式は交流の理論で重要な役割を果たし、波動や量子力学にも利用される重要公式である。本プリントでは微分公式 $(e^x)' = e^x$ を前提とする。証明にはいくつかの方法があるが、わかりやすいのは級数展開を用いる方法である。$x = 0$ で $n$ 階微分可能 ($n$:任意の自然数) な関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

という級数 ($x$ についての無限次多項式) で書けることが数学的に示される (証明は長いので略)。$f(x) = e^x$ について $a_n$ を決めるのは簡単で、まず $f(0) = e^0 = 1$ より $a_0 = 1$。両辺を一回微分すると、左辺は $f'(x) = (e^x)' = e^x$, 右辺は $a_1 + a_2 x + \cdots$ となる。ここに $x = 0$ を代入することで $a_1 = 1$。これを高階の微分について繰り返していくと、$a_n = 1/(n!)$ がわかる ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ は階乗)。よって

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots, \tag{3}$$

を得る。これを $e^x$ のテイラー展開 (正確にいうと $x = 0$ におけるテイラー展開) という。同様の手続きを $f(x) = \cos x$ および $f(x) = \sin x$ に行うことでテイラー展開

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots, \tag{4}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots, \tag{5}$$

を示すことができる ($(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ を使う. やってみよ)。さて、式 (3) に $x = i\theta$ を代入すると、

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{i}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{i}{5!}\theta^5 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{6}$$

これと式 (4)-(5) を比較することでオイラー公式が示される。

電磁気学 A(加藤岳生担当) 第 12 講中の演習プリント　(2017.1.11)

問題 1 RLC 直列回路 (下図) を考える。交流電圧は $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ とする。キルヒホッフの法則より

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t) \tag{7}$$

となる。電荷保存則から $dQ/dt = I$ が成り立つことに注意。この式から $I(t)$ を求めたい。高校では $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$ とおき ($I_0$:振幅, $\alpha$:位相のずれ)、三角関数の合成を用いる。しかし、より見通しよく扱うためには、複素数を導入するのがよい。オイラー公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$(裏面の補充プリント参照) より、

$$V(t) = \mathrm{Re}(V_0 e^{i\omega t}), \tag{8}$$

$$I(t) = \mathrm{Re}(I_0 e^{i\omega t + i\alpha}) = \mathrm{Re}(\tilde{I}_0 e^{i\omega t}) \tag{9}$$

とかける ($\mathrm{Re}(z)$ は複素数 $z$ の実部)。ここで $\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\alpha}$ は複素振幅と呼ばれる。オイラー公式から

$$\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\alpha} = I_0(\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{10}$$

ともかけるが、これは大きさ $I_0$, 偏角 $\alpha$ の複素数にほかならない。つまり、複素数 $\tilde{I}_0$ は振幅 $I_0$ と位相のずれ $\alpha$ の両方の情報を含む量である。以下の問いを解け。

(1) 式 (7) に式 (8)-(9) を代入して整理することによって $\tilde{I}_0$ が以下のように計算されることを示せ。

$$\tilde{I}_0 = \frac{V_0}{R + iL\omega + 1/(iC\omega)} \tag{11}$$

(2) 電流の振幅 $I_0$ および偏角の正接 $\tan\alpha$ を求めよ。
(3) $V_0$ を固定しながら $\omega$ を変化させたとき、$I_0$ を $\omega$ のグラフとして書け。