電磁気学 A(加藤担当) 2016 年度期末試験略解　講義後 Web 公開

問題 1.

(1) $\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.　　(2) $\mathrm{div}\vec{A} = 3$.　　(3) $\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(4) $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ とおくと、$dx = -a\sin\theta\, d\theta$, $dy = a\cos\theta\, d\theta$ より

$$\int_{\mathrm{C}} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}} (-y)dx + xdy = \int_0^{2\pi} [(-a\sin\theta)(-a\sin\theta\, d\theta) + (a\cos\theta)(a\cos\theta\, d\theta)] = \int_0^{2\pi} a^2\, d\theta = 2\pi a^2.$$

(5) ストークスの定理: $\displaystyle\int_A (\mathrm{rot}\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_{\mathrm{C}} \vec{A}\cdot d\vec{r}$.

(6) アンペールの法則: 任意の閉経路 C に対して、磁場 $\vec{B}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \vec{B}\cdot d\vec{r}$ が閉経路 C を貫く電流 I に比例し、

$$\int_{\mathrm{C}} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

となることを指す。これはマックスウェル方程式の式 $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ の両辺を経路 C で囲まれる曲面 S で面積分をすると、左辺と右辺がそれぞれ

$$(\text{左辺}) = \int_{\mathrm{S}} \mathrm{rot}\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{\mathrm{C}} \vec{B}\cdot d\vec{r}, \qquad (\text{右辺}) = \mu_0 \int_{\mathrm{S}} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I,$$

となることから導かれる。ここで第一式ではストークスの定理、第二式では電流と電流密度の関係を用いた。

(7) $f = 1/r$ のとき、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に注意して、

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} -x/r^3 \\ -y/r^3 \\ -z/r^3 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} = 0$$

(8) 全微分の公式から

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

等高面 $f(x,y,z) = C$ 上を点が (x,y,z) から $(x+dx, y+dy, z+dz)$ へと移動したとき、$df = 0$ なので、

$$df = 0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \mathrm{grad} f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

となる。よって等高面上の任意の変位 (dx, dy, dz) に対して $\mathrm{grad} f$ は常に直交しており、これは等高面と $\mathrm{grad} f$ が常に直交していることを意味する。

(9) 金属中では $\vec{E} = 0$ であり、また $\mathrm{grad}\phi = -\vec{E} = 0$ から電位 ϕ は金属中で一定値をとる。これにより金属表面でも ϕ は一定であり、金属表面は等電位状態にある。ゆえに (8) の性質から金属表面付近にできる電場 $\vec{E}$ にたいして $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi$ は金属表面と直交しなくてはいけない。

問題 2.
(1) $|\vec{E}| = \sigma/2\varepsilon_0$. (すでに公開しているレポート問題 No.3 の問題の解答と同じ。)
(2) $r < a$ のとき、金属球の中心から半径 r の球面を考え、ガウスの法則を適用すると、この半径 r の球内に電荷がないので

$$4\pi r^2|\vec{E}| = 0 \quad \rightarrow \quad |\vec{E}| = 0$$

$a < x < b$ のとき、金属球の中心から半径 r の球面を考え、ガウスの法則を適用すると、この半径 r の球内の電荷は Q なので、

$$4\pi r^2|\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$b < x$ のとき、金属球の中心から半径 r の球面を考え、ガウスの法則を適用すると、この半径 r の球内の電荷は $+Q$ と $-Q$ が打ち消し合って 0 なので、

$$4\pi r^2|\vec{E}| = 0 \quad \rightarrow \quad |\vec{E}| = 0$$

グラフは省略。
(3) 体積あたりの静電エネルギーが $\varepsilon_0|\vec{E}|^2/2$ なので、

$$U = \int dV \frac{\varepsilon_0|\vec{E}|^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b 4\pi r^2 dr \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \int_a^b \frac{Q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

(4) 片方の棒に電荷 $+Q$ を帯電させると、この帯電棒がつくる電場は、棒を中心軸とする半径 r, 高さ l の円柱に対してガウスの法則を適用して、

$$2\pi rl|\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

となる。ただし、棒の端の効果は無視できるとした。もう片方の棒に電荷 $-Q$ を帯電させて、片方の棒から r, もう片方から $d - r$ 離れた棒の間の点での電場を考えると、電場の重ね合わせから、

$$|\vec{E}| = \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)$$

電位差の大きさ V を計算すると、

$$V \simeq \frac{Q/l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_a^d \frac{dr}{r} + \int_0^{d-a} \frac{dr}{d-r}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 l}\log(d/a)$$

途中で d が a に比べて十分大きいことを用いた。これより、相互キャパシタンスは

$$C = Q/V = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\log(d/a)}$$

問題 3.
(1) 磁束が $\Phi = \displaystyle\int_x^{x+a} b\,dr \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\log\left(\frac{x+a}{x}\right)$ となるので、

$$I = \frac{1}{R}\left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \frac{\mu_o Ibv}{2\pi R}\left|\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}\right|$$

(2) レポート問題 No. 5 と同じ問題なので、そちらの解答を見よ。
(3) アンペールの法則そのものである。
(4) レポート問題 No. 5 とほぼ同じで積分範囲を $z = 0$ から $z = \infty$ に変更するだけ。被積分関数は偶関数なので、通常のソレノイド (単位長さあたりの巻数 n とする) の磁場の半分 ($\mu_0 In/2$) になる。

問題 4.

(1) C と L の並列回路の合成インピーダンス $1/(1/(iL\omega)-iC\omega)$ が発散すればよい。$C\omega=1/L\omega$ より $\omega=1/\sqrt{LC}$.

(2) $|\vec{j}|=I/(2\pi rh)$. オームの法則から $|\vec{E}|=|\vec{j}|/\sigma=I/(2\pi\sigma hr)$.

$$V=\int_a^b|\vec{E}|dr=\int_a^b\frac{I\,dr}{2\pi\sigma hr}=\frac{I}{2\pi\sigma h}\log\frac{b}{a}$$

(3) 電荷 $-q'$ の中心 O からの距離を x とする。球状の任意の点を A とし、電荷 q と A の距離を r, 電荷 $-q'$ と A の距離を r' とする。さらに OA と O-($-q'$)-($+q$) がなす角を α とすると、球面上で電位がゼロになる条件は

$$\frac{q}{r}=\frac{q'}{r'}$$

両辺を 2 乗して余弦定理を用いると、

$$\frac{q^2}{d^2+a^2-2da\cos\alpha}=\frac{q'^2}{d^2+x^2-2ax\cos\alpha}$$
$$\rightarrow\quad q'^2(d^2+a^2-2da\cos\alpha)=q^2(d^2+x^2-2ax\cos\alpha)$$

これが任意の α で成立するためには、

$$q^2(a^2+x^2)=q'^2(d^2+a^2),\quad q^2(2ax)=q'^2(2ad)$$

が同時に成り立たないといけない。これらを整理して、$x=d^2/a$, $q'=dq/a$ を得る。