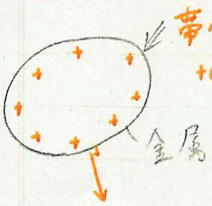
第7講 電場のエネルギー

復習



帯電 $+Q$

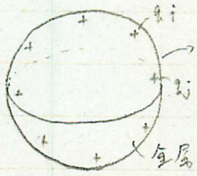
金属

- 表面に帯電
- 金属の内部の電場 $\mathbb{E}$ は $\mathbb{E}=0$
- 〃 電位 ϕ は $\phi=\text{const.}$
- $\mathbb{E}\perp$ (金属の表面) (金属外部)

◎ 本日の目標 (静電場最後)

① エネルギーを考える, ② 例題をいくつか.

例



q_i

q_j

金属球.

→ このとき, エネルギーはどう計算するのか?

q_i, q_j : 静電荷.

◇ 高校の見方. $U=\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|}$

$\rho(\mathbb{r})$: 電荷密度

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\rho(\mathbb{r})\cdot dV\cdot\rho(\mathbb{r}')\cdot dV'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|}$$

$dV=dx\,dy\,dz$

$dV'=dx'dy'dz'$

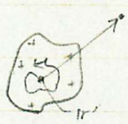
↳「$i=j$」の重複を避ける.

・電位 $\phi(\mathbb{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_i|}$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV'\frac{\rho(\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$

$\mathbb{r}$: 外から決められた位置で, 今回は電位を計算したい位置

$\mathbb{r}'$: 積分変数.



$\mathbb{r}$ ここの $\phi(\mathbb{r})$ が知りたい.

$\mathbb{r}'$

よって, $U=\frac{1}{2}\int dV\rho(\mathbb{r})\phi(\mathbb{r})$

↳ 金属内部で一定.

金属では $U=\frac{1}{2}\phi\int dV\rho(\mathbb{r})=\frac{1}{2}\phi Q$

この見方だと, クーロン相互作用による位置エネルギーの和.

電場だって生きてる.

↓

これは, 静電場でのみ成り立つ考え方 (☺遠隔力)

No.

Date

◦ 別の見方.

$$U = \frac{1}{2}\int dV\, \rho(\mathbb{r})\phi(\mathbb{r})$$

ポアソン方程式 $\left(\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$ を代入 $\Leftrightarrow \left(\rho = -\varepsilon_0\nabla^2\phi\right)$ を代入

先週やった.

$$\therefore U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int dV\, (\nabla^2\phi)\cdot\phi$$

ここで. $\nabla\cdot(\phi\nabla\phi) = (\nabla\phi)^2 + \phi(\nabla^2\phi)$ ← 証略.

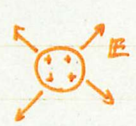
$$\therefore U = \underbrace{-\frac{\varepsilon_0}{2}\int \underbrace{\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)}_{= \mathrm{div}(\phi\,\mathrm{grad}\,\phi)} dV}_{} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int(\nabla\phi)^2 dV$$

∵ $\int \mathrm{div}(\phi\nabla\phi)dV \underset{\text{ガウスの定理}}{=} \int_S (\phi\nabla\phi)d\mathbb{S} \rightarrow 0$

↳ 十分遠方の球面 $(|\mathbb{r}| \to +\infty,\ \phi(\mathbb{r}) \to 0,\ dS \to +\infty)$

ここで. $\phi\nabla\phi \propto \frac{1}{r^3}$, $|dS| \propto r^2$ より. $(\phi\nabla\phi)\cdot dS \rightarrow 0$

$$\therefore U = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbb{E}^2 dV$$



エネルギーは外側

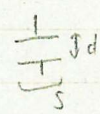
① 電場 $\mathbb{E}$ が エネルギーをもつと解釈できる.

② 高校の見方と「同じエネルギー」だが. 見方が違う.

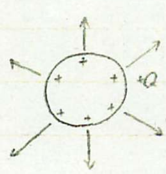
③ 導出は静電場だが 実は一般に成り立つ.
(ガウスの法則と同じ)

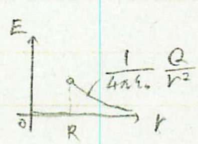
応用例

コンデンサー $\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}(Ed)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\frac{\varepsilon_0}{2}E^2}\cdot\underbrace{Sd}_{dV}$

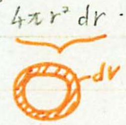


例2





$$\int\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbb{E}^2\cdot dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{+\infty}\underbrace{4\pi r^2 dr}_{}\cdot\left(\frac{1}{4\pi r^2}\right)^2\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_0^2}$$

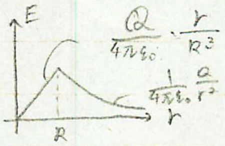


$$= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0}\int_R^{+\infty}\frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{4\pi r}\right]_R^{+\infty}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{Q^2}{2C}$$ (C: 自己キャパシタンス)

応用3　一様に帯電した球。

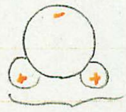


$$\int\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\,dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R 4\pi r^2 dr\cdot\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{r^2}{R^6}+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{+\infty}4\pi r^2 dr\cdot\left(\frac{1}{4\pi r^2}\right)^2\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_0^2}$$
$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_0^2}\cdot\left[\frac{1}{5}\frac{r^5}{R^6}\right]_0^R+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$
$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{5R}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$
$$=\frac{6Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}=\underline{\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}$$

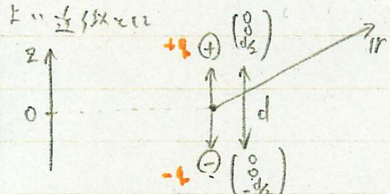
- 静電場の応用問題

① 双極子

例　水分子



よい近似として



$\phi(\mathbf{r})$ や $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を求めたい。

$|\mathbf{r}|\gg d$

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})^2}}+\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{d}{2})^2}}\right)\qquad (x,y,z\gg d)$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{-zd+(\frac{d}{2})^2}{x^2+y^2+z^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{zd+(\frac{d}{2})^2}{x^2+y^2+z^2}}}\right)$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\fallingdotseq 1+(-\frac{1}{2})x,\ x\ll 1\right)$

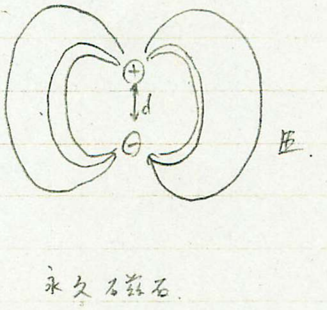
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(1+\frac{zd}{2(x^2+y^2+z^2)}-1+\frac{zd}{2(x^2+y^2+z^2)}\right)$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{zd}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\phi=-\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\\frac{\partial\phi}{\partial y}\\\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix}=-\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}(-\frac{3}{2})\frac{2xzd}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\\(-\frac{3}{2})\frac{2yzd}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\\\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2}\frac{z\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\end{pmatrix}=-\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\frac{2xzd}{r^5}\\-\frac{3}{2}\frac{2yzd}{r^5}\\-\frac{3z^2-r^2}{r^5}\end{pmatrix}$$

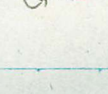
$$\left(=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}\frac{3xzd}{r^5}\\\frac{3yzd}{r^5}\\\frac{3z^2-r^2}{r^5}\end{pmatrix}\right)$$

ここで、x, y, z 成分で qd が共通

$p := qd$ ：双極子モーメント



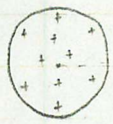
おまけ　永久磁石



電子（点）
$\parallel$
スピン（双極子）

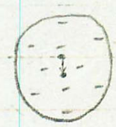
N極のみは、存在しない
（数学的には可である）

② 双極子の応用



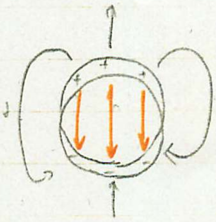
+Q

一様に帯電した球.



-Q

⇒ 重ね合わせより

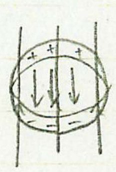


外側は双極子.

内側は一様電場.

(証略)

このことから.



⇒