電磁気学 A(加藤担当) レポート No. 1 の解答　第 2 講配布 (2017.10.4)

問題 1. 授業で述べたように、レポートで考えるベクトル場 $\vec{A}$ はすべて $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(x,y) \\ A_y(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。つまり、$\vec{A}$ の z 成分は 0 で、かつ x 成分と y 成分は z に依存していない。このとき $\mathrm{rot}\vec{A}$ および $\mathrm{div}\vec{A}$ は

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(A_y(x,y)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(A_x(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial}{\partial x}(A_y(x,y)) - \frac{\partial}{\partial y}(A_x(x,y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(A_x(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y(x,y)) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

となる (途中で、A_x, A_y が z に依存しないことから、$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$ を使っている)。特に $\mathrm{rot}\vec{A}$ は z 成分しかもたない。$\mathrm{div}\vec{A}$ および $(\mathrm{rot}\vec{A})_z$ を求めるには、偏微分の計算を丹念に行えば良い。例えば、x に関する偏微分では、y をあたかも定数と考えて、普通に x で微分すればよい。例えば、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0,$$

である。同様に、y に関する偏微分では、x をあたかも定数と考えて、普通に y で微分すればよい。例えば、

$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1,$$

である。

(1) $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(a) + \frac{\partial}{\partial y}(b) = 0, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial x}(b) - \frac{\partial}{\partial y}(a) = 0.$

(2) $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(0) = 1, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0.$

(3) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(0) = 1.$

(4) $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0.$

(5) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 2.$

(6) $\vec{A} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0, \quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) = 0.$

(7), (8) については、$1/r^2$ を x, y でそれぞれ偏微分したときの計算を先にしておくとよい。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{2}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2}) = -\frac{2}{r^3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{2x}{r^4}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{2}{r^3}\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2+y^2}) = -\frac{2}{r^3}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{2y}{r^4}$$

計算の途中で、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ を x で偏微分する計算があるが、これは y を定数とみなして x で通常の微分を実行すればよい。y で偏微分する場合は、逆に x を定数とみなして、y の微分を実行する。これらを用いると、

(7) $\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r^2} \\ \frac{y}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{1}{r^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{1}{r^2} + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \frac{1}{r^2} + x\left(-\frac{2x}{r^4}\right) + \frac{1}{r^2} + y\left(-\frac{2y}{r^4}\right) = \frac{2}{r^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{r^4} = 0, \\
\mathrm{rot}\vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right) - x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= y\left(-\frac{2x}{r^4}\right) - x\left(-\frac{2y}{r^4}\right) = 0,
\end{aligned}$$

(8) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r^2} \\ \frac{x}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= -y\left(-\frac{2x}{r^4}\right) + x\left(-\frac{2y}{r^4}\right) = 0, \\
\mathrm{rot}\vec{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{1}{r^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{1}{r^2} + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \frac{1}{r^2} + x\left(-\frac{2x}{r^4}\right) + \frac{1}{r^2} + y\left(-\frac{2y}{r^4}\right) = \frac{2}{r^2} - \frac{2(x^2+y^2)}{r^4} = 0.
\end{aligned}$$

おまけ (電磁気学との関係)

少しだけ先回りして、電磁気学と div, rot の間の関係を述べよう (また第 4 講以降にちゃんと説明するので今完全にわからなくてもよい)。

レポート No.1 の (8) のベクトル場は、原点 ($x = y = 0$) を通る z 軸に平行な無限に長い直線状の電流がつくる磁場 $\vec{B}$ と (比例定数を除いて) 同じである ($|\vec{B}| = 1/r$ に注意)。(8) のベクトル場を磁場 $\vec{B}$ とみなすと、上記の解答のように原点以外では $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\vec{B} = 0$ がいえる。原点でも $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ だが、$\mathrm{rot}\vec{B}$ は無限大に発散することが示せる (示してみよ)。高校の電磁気学でやったように、電流が磁場の源になるが、正確にいうと「電流は $\mathrm{rot}\vec{B}$(つまり磁場の渦度) をつくる」のである！同じようにレポートの (7) は、原点 ($x = y = 0$) を通る z 軸に平行な無限に長い線電荷が作る電場 $\vec{E}$ と同じことがわかる。このとき原点で $\mathrm{div}\vec{E}$ が発散している (示してみよ) が、これは電荷が電場の源になり「電荷は $\mathrm{div}\vec{E}$(つまり電場の湧き出し) をつくる」と解釈できる。