電磁気学 A(加藤担当) レポート No. 2 略解　第 3 講配布 (2017.10.11)

問題 1.

(a) $\mathrm{grad}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

最後の等式では偏微分の順番を変えても結果が変わらないことを用いた。

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ とすると、$\mathrm{rot}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$. これより

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.$$

最後の等式では偏微分の順番を変えても結果が変わらないことを用いた。

問題 2.

ベクトル場は $\vec{A} = (-y, x, 0)$ である。

(a) C_1 を媒介変数表示すると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le \pi/2)$. これより

$$\int_{\mathrm{C}_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}_1} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_0^{\pi/2} \left(A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt} + A_z \frac{dz}{dt}\right) dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left((-\sin t)\frac{d}{dt}(\cos t) + (\cos t)\frac{d}{dt}(\sin t) + 0\right) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

(b) C_2 を媒介変数表示すると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$. これより

$$\int_{\mathrm{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left((-t)\frac{d}{dt}(1-t) + (1-t)\frac{d}{dt}(t) + 0\right) dt = \int_0^1 (t + 1 - t) dt = 1.$$

(c) C_3 の媒介変数表示は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 1)$ の和.

$$\int_{\mathrm{C}_3} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-0) \times \frac{d}{dt}(1-t) dt + \int_0^1 0 \times \frac{d}{dt}(t) dt = 0.$$