電磁気学 A(加藤担当) レポート第 5 回　第 11 講配布 (2017.12.20)

問題. 経路 C に沿って電流 I が流れているとき、磁場 $\vec{B}$ はビオ・サヴァールの法則

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{d\vec{r'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{1}$$

によって決まる (μ_0 は真空の透磁率)。この法則を利用して、以下の問に答えよ。

(1) 図 1 のように原点 O を中心とし xy 平面におかれた半径 a の円電流 I がある。この円電流が位置 $\vec{r} = (0,0,z)$ につくる磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ を求めよ。対称性より $\vec{B}$ は z 成分しかないので、B_z だけ求めればよい。ヒント：円上の位置 $\vec{r'}$ を変数 θ によって媒介変数表示し、$\vec{r'}$ についての線積分を θ に関する積分に書き直せ。$d\vec{r'} = \frac{d\vec{r'}}{d\theta}d\theta$ に注意。

(2) 単位長さあたりの巻数が n, 半径 a の十分長いソレノイドに電流 I を流したとき、ソレノイドの中心軸上での磁場 $\vec{B}$ をビオ・サヴァールの法則から求めよ。ヒント：図 2 のように z から $z+dz$ にあるソレノイドの一部 (=円電流) が位置 $\vec{r} = (0,0,0)$ における磁場は、(1) の解答において I をこの区間にある電流にし、z を $-z$ に置き換えたものである。これを $z=-\infty$ から $z=\infty$ まで積分せよ。

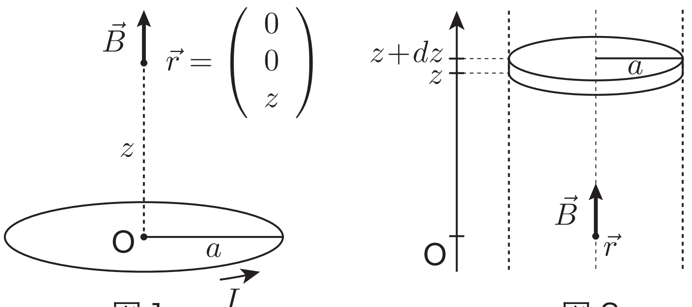

図 1　　図 2

眠れぬ夜のために (成績とは無関係) 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{2}$$

の一般解 $\phi(x,t)$ は任意の関数 $f(x)$, $g(x)$ によって $\phi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ と書けることを示せ。(ヒント：方程式を新しい変数 $u = x - ct$, $v = x + ct$ によって書き直す。)

(アンケート) これが最後のレポートです。講義も来年あと一回で終わりです (補講はやめました)。一学期間おつきあいいただき、ありがとうございます。例によって、講義に関する疑問や感想を自由に書いてください。講義全体を振りかえって何か書いていただけるとありがたいです。こういう話が面白かった、印象深かった、などの感想をいただけると励みになります。アンケートはホームページ (http://kato.issp.u-tokyo.ac.jp/kato) に掲載したいと思います。掲載がいやな人はそのようにかいてください。

前回のレポートに関する補足

第4回レポートの問題2.(1) に苦戦した人が多かったようです。特に図2(a) にかいた経路 C_2 についてアンペールの法則を適用することで、$B_x = 0$ を結論するのが難しかったようです。問題文もこの辺はごまかして書いてあり、時間をかけさせてしまって申し訳ないです。このプリントで簡単に補足します。第4回レポートの問題を見ながら読んでください。

平面板は十分広いので、磁場 $\vec{B}$ は x, y によらず z のみの関数になり、$\vec{B}(z) = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$ と書ける。まず、磁場の z 成分から考えよう。$\vec{B}$ が z のみによるので、

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \rightarrow \quad B_z = \mathrm{const.} \tag{3}$$

また、平面板についての鏡像対称性から、$B_z(-z) = -B_z(z)$ が成り立つはずである。この2つの条件を同時に満たすには $B_z = 0$ しかありえないので、まず磁場の z 成分はゼロである。次に経路 C_2 でアンペールの法則を適用する。磁場の z 成分はないので、C_2 についての線積分の内、有限になりうるのは x 方向に動く部分 (長さ L とする) のみであり、

$$\oint_{\mathrm{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = (B_x(z_1) - B_x(z_2)) \times L \tag{4}$$

となる。ここで z_1 は経路 C_2 で x 正方向に動く部分の z 座標、z_2 は経路 C_2 で x 負方向に動く部分の z 座標である。また経路 C_2 を貫く電流はゼロなので、上記の線積分はゼロとなり、その結果 $B_x(z_1) = B_x(z_2)$ となる。z_1, z_2 は任意にとれるので、結局、$B_x(z) = \mathrm{const.}$ である。ここで、B_x の値は平板を流れる電流と無関係であることに注意する。平板に流れる電流が0のときにも磁場があるのは不合理であるので、結局 $B_x(z) = 0$ が結論される。なお、この最後のロジック (平板を流れる電流がゼロなら磁場はないはず) は、経路 C_1 でアンペールを使って B_y の値を出すときにもさりげなく利用している (そこを悩んでいる人は少数派でしたが)。

ポアソン方程式の一意性定理の証明

授業では省いていた一意性定理の証明を簡単にまとめる。ポアソン方程式を

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

とする。境界条件は「十分遠方にとられた閉曲面 S 上で $\psi(\vec{r}) = 0$」とする。もし解が2つあったとすると、それを $\psi_1(x,y,z)$, $\psi_2(x,y,z)$ としたとき、その差 $\phi(x,y,z) = \psi_1(x,y,z) - \psi_2(x,y,z)$ は、$\nabla^2\phi = 0$ を満たす。一方、$\vec{A} = \phi\,\mathrm{grad}\,\phi$ にガウスの定理を適用すると、

$$\int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\vec{A}\, dV \tag{6}$$

となる (V は閉曲面 S の内部の領域)。左辺は境界条件からゼロ。さらに

$$\mathrm{div}\vec{A} = \mathrm{div}(\phi\,\mathrm{grad}\,\phi) = \phi\,\nabla^2\phi + (\mathrm{grad}\,\phi)^2 = (\mathrm{grad}\phi)^2 \tag{7}$$

が示せる (二番目の等式では $\nabla^2\phi = 0$ を使った)。以上より、$\int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi)^2 dV = 0.$ 被積分関数は0以上なので、この式が成立するのは $\mathrm{grad}\,\phi = 0$ のときのみ。これより $\phi = \mathrm{const.}$。さらに境界条件から、この定数はゼロで、$\phi = 0$。これは異なる解 $\psi_1(x,y,z)$, $\psi_2(x,y,z)$ が存在することと矛盾。証明終。