電磁気学 A(加藤担当) 補充プリント No.2　第 3 講配布 (2017.10.11)

この補充プリントでは、授業で省略した (xy 平面に平行な面とは限らない) 一般の曲面についてのストークスの定理を証明したい。つまり任意の曲面 S, その周回経路を C, 任意のベクトル場 $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ としたとき、

$$\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{rot}\vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

の証明をする。方針としては、まず一般の曲面を細かく分割して微小な平行四面体の集合体とみなし (図 1(a)), それぞれの微小平行四面体においてストークスの定理が成り立つことを示し、その和をとることで曲面全体でも成り立つことをいう。授業との違いは、この微小平行四面体が一般に任意の向きを向いていることである。

微小平行四面体を一つ取り出した図を図 1(b) に示す。この平行四面体の 2 辺を表すベクトルを $\vec{AB} = \hat{a}\mathrm{d}t$, $\vec{AD} = \hat{b}\mathrm{d}s$ と表す ($\hat{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\hat{b} = (b_x, b_y, b_z)$ は単位方向ベクトル, dt, ds は 2 辺の長さを表す)。このとき、各頂点 A, B, C, D の位置ベクトルはそれぞれ $\vec{r}$, $\vec{r} + \hat{a}\mathrm{d}t$, $\vec{r} + \hat{a}\mathrm{d}t + \hat{b}\mathrm{d}s$, $\vec{r} + \hat{b}\mathrm{d}s$ となる。平行四面体を ABCD の順に周回する線積分は、微小な長さをもつ各辺の積分の和であり、

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{ABCD}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &\simeq \vec{A}(\vec{r}) \cdot (\hat{a}\mathrm{d}t) + \vec{A}(\vec{r} + \hat{a}\mathrm{d}t) \cdot (\hat{b}\mathrm{d}s) + \vec{A}(\vec{r} + \hat{b}dt) \cdot (-\hat{a}\mathrm{d}t) + \vec{A}(\vec{r}) \cdot (-\hat{b}ds) \\ &= -(\vec{A}(\vec{r} + \hat{b}\mathrm{d}s) - \vec{A}(\vec{r})) \cdot \hat{a}\mathrm{d}t + (\vec{A}(\vec{r} + \hat{a}\mathrm{d}t) - \vec{A}(\vec{r})) \cdot \hat{b}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

と計算される。途中の近似式では、線積分の定義 (微小区間での線積分の値が $\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$) を用いている。また本来は $\vec{A}$ の移動方向の位置依存性があるはずであるが、それを無視した。例えば A から B へ向かう積分では、本当は位置が $\vec{r}$ から $\vec{r} + \hat{a}dt$ へと変化しているので、その分 $\vec{A}$ も変化しているはずだが、これを無視して $\vec{r}$ でのベクトル $\vec{A}$ の値で代用する (この変化の影響は dt, ds の高次の微小量となるため無視して良い)。

ここでベクトル場 $\vec{A}$ の x 成分 A_x に全微分公式を利用すると

$$\begin{aligned}A_x(\vec{r} + \hat{a}\mathrm{d}t) - A_x(\vec{r}) &= \frac{\partial A_x}{\partial x} a_x \mathrm{d}t + \frac{\partial A_y}{\partial y} a_y \mathrm{d}t + \frac{\partial A_z}{\partial z} a_z \mathrm{d}t \\ A_x(\vec{r} + \hat{b}\mathrm{d}s) - A_x(\vec{r}) &= \frac{\partial A_x}{\partial x} b_x \mathrm{d}s + \frac{\partial A_y}{\partial y} b_y \mathrm{d}s + \frac{\partial A_z}{\partial z} b_z \mathrm{d}s\end{aligned}$$

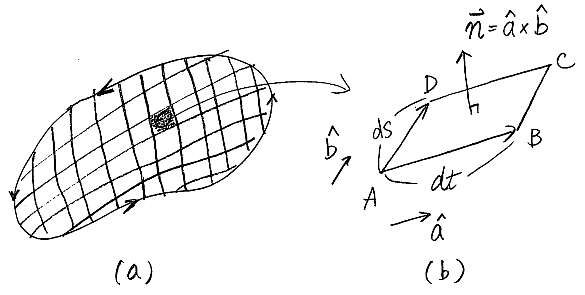

図 1: (a) 曲面を微小平行四面体に分割する. (b) 微小平行四面体の配置.

がいえる。同様の式は A_y, A_z に対しても成立する。これを使うと、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{ABCD}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} =& -\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}b_x\mathrm{d}s + \frac{\partial A_x}{\partial y}b_y\mathrm{d}s + \frac{\partial A_x}{\partial z}b_z\mathrm{d}s\right)a_x\mathrm{d}t \\
&-\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}b_x\mathrm{d}s + \frac{\partial A_y}{\partial y}b_y\mathrm{d}s + \frac{\partial A_y}{\partial z}b_z\mathrm{d}s\right)a_y\mathrm{d}t \\
&-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}b_x\mathrm{d}s + \frac{\partial A_z}{\partial y}b_y\mathrm{d}s + \frac{\partial A_z}{\partial z}b_z\mathrm{d}s\right)a_z\mathrm{d}t \\
&+\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}a_x\mathrm{d}t + \frac{\partial A_x}{\partial y}a_y\mathrm{d}t + \frac{\partial A_x}{\partial z}a_z\mathrm{d}t\right)b_x\mathrm{d}s \\
&+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}a_x\mathrm{d}t + \frac{\partial A_y}{\partial y}a_y\mathrm{d}t + \frac{\partial A_y}{\partial z}a_z\mathrm{d}t\right)b_y\mathrm{d}s \\
&+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}a_x\mathrm{d}t + \frac{\partial A_z}{\partial y}a_y\mathrm{d}t + \frac{\partial A_z}{\partial z}a_z\mathrm{d}t\right)b_z\mathrm{d}s \\
=& \Bigg[-\frac{\partial A_y}{\partial z}(a_yb_z - a_zb_y) - \frac{\partial A_z}{\partial x}(a_zb_x - a_xb_z) - \frac{\partial A_x}{\partial y}(a_xb_y - a_yb_x) \\
&\quad +\frac{\partial A_z}{\partial y}(a_xb_y - a_yb_x) + \frac{\partial A_x}{\partial z}(a_zb_x - a_xb_z) + \frac{\partial A_y}{\partial x}(a_xb_y - a_yb_x)\Bigg]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
=& \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)n_x\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)n_y\mathrm{d}t\mathrm{d}s + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)n_z\mathrm{d}t\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

と計算される。最後から 2 番目の等式では、$\vec{n} = \hat{a}\times\hat{b}$ で定義されるベクトル $\vec{n}$ を定義した。ベクトル $\vec{n}$ は平行四面体の法線の方向に沿ったベクトルで (図 1(b))、向きは ABCD の周回向きに対して右ねじで決められ、大きさは $\sin\theta$ である (θ は $\hat{a}$, $\hat{b}$ が成す角)。よって、微小平行四面体の微小面積ベクトル $\mathrm{d}\vec{S}$ は、$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$ とかける ($|\mathrm{d}\vec{S}| = \mathrm{d}t\mathrm{d}s\sin\theta$ が微小平行四面体の面積となることに注意)。以上より、

$$\int_{\mathrm{ABCD}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{rot}\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

が言える。授業で示したように、微小平行四面体の周回線積分 (上記の式の左辺) をすべて寄せ集めると、もとの曲面 S の周りの周回経路 C での線積分となる。また、上記の式の右辺をすべての微小四面体について寄せ集めると、定義より曲面 S についての面積分となる。ゆえにストークスの定理が示される。

ここでは成分表示でがちがちと計算した。だが、よく考えると xy 平面に平行な微小四面体についてストークスの定理を証明できていれば、一般の面でも成り立つのは当然である。というのも、面を空間中で回転させても、ベクトルの内積 ($\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ や $(\mathrm{rot}\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ など) は一定であるはずだからである。もっと具体的にいえば、3×3 ユニタリー行列によって空間の座標変換 $\vec{r}' = U\vec{r}$ を行うことを考える。このとき、ベクトル場は $\vec{A}' = U^{-1}\vec{A}$ と変換される (座標が回転したと思わず、座標は一定のままベクトル場が回転した、と思うにはベクトル場は「逆の」回転をしているようにみえるので)。この座標変換のもとで、微分演算子 (rot) や積分の変換性を考えていくと、ストークスの定理が回転座標変換について不変であることを確認できる (要証明)。これは「渦 (rot) の見え方が使っている座標にはよらないこと」を意味していて、自然である。