電磁気学A(加藤担当) 補充プリントNo.3　第4講配布 (2017.10.18)

位置 $\vec{r}_0$ におかれた点電荷 q がつくる電場 $\vec{E}$ は, クーロンの法則より

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{R^3}$$

で与えられる. ただし2番目の等号では, 点電荷の位置 (x_0, y_0, z_0) と位置 (x, y, z) の間の距離を $R = |\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ とした. また, 成分でかくと,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-x_0}{R^3} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y-y_0}{R^3} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z-z_0}{R^3} \end{pmatrix} \tag{1}$$

である. この補充プリントでは, $\vec{r} \neq 0$ のときにこのクーロン電場に対して,

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

となることを示す. なお, 本授業を通して, ゼロベクトル $\vec{0}$ は 0 と簡単に表記することにする (ベクトルか実数かは式を見ればわかるため). 以下の証明は div および rot の計算のよい練習問題なので, ぜひ各自が手を動かして証明をなぞってほしい.

証明の準備

R を x, y, z でそれぞれ偏微分したときの計算を先にしておくとよい.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right) \\ &= \frac{2(x-x_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} = \frac{x-x_0}{R} \end{aligned}$$

途中で $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ を x で偏微分する計算は, x 以外の変数をすべて定数とみなし, x で通常の微分を実行すればよい. 同様にして,

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y-y_0}{R}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{z-z_0}{R}.$$

これらの式と合成関数の微分公式を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right) = -\frac{3}{R^4}\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{3}{R^4}\frac{x-x_0}{R} = -\frac{3(x-x_0)}{R^5} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R^3}\right) = -\frac{3}{R^4}\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{3}{R^4}\frac{y-y_0}{R} = -\frac{3(y-y_0)}{R^5} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R^3}\right) = -\frac{3}{R^4}\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{3}{R^4}\frac{z-z_0}{R} = -\frac{3(z-z_0)}{R^5} \tag{4}$$

$\mathrm{div}\vec{E}=0$ の証明

まず, E_x を x で偏微分しよう. 式 (1) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{R^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)\frac{1}{R^3}+(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right)\right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{1\times\frac{1}{R^3}+(x-x_0)\times\frac{(-3)(x-x_0)}{R^5}\right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3(x-x_0)^2}{R^5}\right)\end{aligned}$$

となる. ここで 2 番目の等号では積の微分の公式を, 3 番目の等号では式 (2) を用いた. 同様にして, 式 (3), (4) を用いることで,

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3(y-y_0)^2}{R^5}\right), \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3(z-z_0)^2}{R^5}\right).$$

これらより,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{R^3}-\frac{3(x-x_0)^2+3(y-y_0)^2+3(z-z_0)^2}{R^5}\right)=0\end{aligned}$$

が得られる (最後の等号で R の定義を用いた).

$\mathrm{rot}\vec{E}=0$ の証明

まず, $\mathrm{rot}\vec{E}$ の z 成分から考えてみよう.

$$\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y},$$

式 (1) の各成分を代入すると, 上記の 2 つの偏微分は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-y_0}{R^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{(y-y_0)\times\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right)\right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{(y-y_0)\times(-3)\frac{(x-x_0)}{R^3}\right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\times(-3)\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{R^3} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-x_0}{R^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{(x-x_0)\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R^3}\right)\right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{(x-x_0)\times(-3)\frac{(y-y_0)}{R^3}\right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\times(-3)\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{R^3}\end{aligned}$$

となる. 2 つの偏微分は全く同じとなるので,

$$\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0,$$

となる. $\mathrm{rot}\vec{E}$ の x 成分, y 成分も同様の計算により 0 となる. よって, $\mathrm{rot}\vec{E}=0$.