電磁気学 A(加藤担当) 補充プリント No.4　第 5 講配布 (2017.10.25)

デルタ関数

電磁気学や量子力学では, (ディラックの) デルタ関数と呼ばれる変わった関数を導入することで, 見通しよく計算を行うことができる. デルタ関数 $\delta(x)$ とは, 以下の性質を満たす関数である.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}, \tag{1}$$

$$\int_{-A}^{B} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad (f(x) \text{ は任意の連続関数}, A, B \text{ は正の定数}). \tag{2}$$

直感的には $\delta(x)$ は $x = 0$ に非常に鋭いピークを持つ関数であるが, 式 (1) の性質からそのピークの幅はゼロでなくてはいけない. しかも式 (2) で $f(x) = 1$ とおけばわかるように

$$\int_{-A}^{B} \delta(x)dx = 1, \quad (A, B \text{ は正の定数}), \tag{3}$$

が成り立つので, ピークの幅がゼロにもかかわらず, その積分値が 1 となる. これが $x = 0$ で $\delta(x) = \infty$ となっている理由になる. もちろんそのような関数は通常の意味では存在しないが, 関数の極限としては存在してよい. 例えば, 関数 $g_d(x)$ を

$$g_d(x) = \begin{cases} 1/d & (-d/2 \leq x \leq d/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \tag{4}$$

と定義する. ここで $d$ は幅にあたり, 任意の $d$ で $\int_{-\infty}^{\infty} g_d(x)dx = 1$ である. これをつかうと, $\lim_{d\to 0} g_d(x) = \delta(x)$ となる.

関数 $g_d(x)$ の極限としてデルタ関数 $\delta(x)$ を考えると, 公式 (2) は次のように理解できる. $d$ が十分小さいと仮定すると, $-d/2 \leq x \leq d/2$ の間で $f(x)$ はほぼ一定とみなせる. このとき, $A, B \geq d/2$ として,

$$\lim_{d\to 0} \int_{-A}^{B} f(x)g_d(x)dx = \lim_{d\to 0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{f(x)}{d}dx \simeq f(0) \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d}dx = f(0) \tag{5}$$

となるので (2) が示される. ここでの証明はいいかげんだが, ちゃんと数学的にやるには、$f(x)$ を $x = 0$ まわりでテーラー展開して, 積分を評価していくとよい.

電磁気学におけるデルタ関数

次に電磁気の授業ででてきたデルタ関数との対応を述べよう. まず

$$\int_{a}^{b} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0), \quad (f(x) \text{ は任意の関数}, a \leq x_0 \leq b), \tag{6}$$

を簡単に導くことができる (左辺の積分変数を $x$ から $x' = x - x_0$ に変更し, デルタ関数の定義 (2) を使う). 3 次元空間中の点電荷を表すためには, 3 次元版のデルタ関数が必要であるが, それは

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \tag{7}$$

と定義すればよい. このようにすると, 3 次元空間中の任意の領域 V に対して,

$$\int_{\mathrm{V}} f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & (\vec{r}_0\text{が V の内側にあるとき}) \\ 0 & (\vec{r}_0\text{が V の外側にあるとき}) \end{cases} \tag{8}$$

となる. 一般に示すのは大変なので, V が立方体の領域 ($a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $e \leq z \leq f$) に限って考えよう. このとき, 体積積分は 3 重積分に書き換えることができ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{V}} f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)dV &= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x, y, z)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ &= \begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) & ((a \leq x_0 \leq b) \wedge (c \leq y_0 \leq d) \wedge (e \leq z_0 \leq f)) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

となり, 式 (8) が確かに成り立つことがわかる.