電磁気学 A(加藤担当) 補充プリント No. 5　第 6 講配布 (2017.11.8)

この補充プリントでは、静電場に対する 2 つの Maxwell 方程式

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0, \tag{2}$$

を用いて、原点 ($\vec{r}_0 = 0$) に置かれた点電荷

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z), \tag{3}$$

がつくる電場 $\vec{E}$ を求め、それがクーロンの法則に一致することを示す ($\delta(x)$ はデルタ関数)。フーリエ変換を用いるので、現時点で完全にわからなくてもよいし、試験の範囲外なので安心してほしい。

まず、位置 (x, y, z) の関数 $f(x, y, z)$ の 3 次元のフーリエ変換を以下のように定義する。

$$F(k_x, k_y, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz f(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \tag{4}$$

関数 $F(k_x, k_y, k_z)$ は以下のフーリエ逆変換によってもとの関数 $f(x, y, z)$ にもどすことができる。

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \tag{5}$$

この証明には以下の恒等式を用いる (証明は省略、適当な参考書を参照)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} = 2\pi\delta(x - x'). \tag{6}$$

上記の Maxwell 方程式のうち、$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ より、$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ となる電位 $\phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z)$ が存在する。これと $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$ を使うと、もう一つの Maxwell 方程式から

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}(-\mathrm{grad}\phi) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}), \\
&\longrightarrow \quad -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z).
\end{aligned} \tag{7}$$

というポアソン方程式が得られる。これは偏微分方程式であり、この方程式を解いて $\phi(\vec{r})$ を求めることを考える。まず、逆フーリエ変換の式

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \Phi(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \tag{8}$$

および恒等式 (6) を用いると、ポアソン方程式 (7) の両辺はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \Phi(k_x, k_y, k_z)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{q}{\epsilon_0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}
\end{aligned} \tag{9}$$

と書き換えられる。両辺の比較により、

$$\Phi(k_x, k_y, k_z)k^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \rightarrow \quad \Phi(k_x, k_y, k_z) = \frac{q}{\epsilon_0 k^2}. \tag{10}$$

ここで $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ である。逆フーリエ変換に再度代入すると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \Phi(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \tag{11}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k^2}. \tag{12}$$

ここで $\phi(x, y, z)$ は原点まわりで球対称となっているはずなので、特に $(x, y, z) = (0, 0, r)$ の場合を考える。さらに (k_x, k_y, k_z) を極座標 (k, θ, φ) で表示し、3 重積分を極座標に書き換えると、$dx\,dy\,dz = k^2 \sin\theta dk\,d\theta\,d\varphi$ より (書き換えの仕方は教科書を参照; ヤコビアンの計算をするか微小体積要素を図に書くとわかる)

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} k^2\, dk \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k^2} e^{i(kr\cos\theta)}, \tag{13}$$

φ についての積分を実行すると 2π がでてくる。さらに $s = \cos\theta$ と変数変換すると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{1} ds e^{ikrs} \tag{14}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \tag{15}$$

$e^{ikr} - e^{-ikr} = 2i\sin(kr)$ を用いて、さらに $K = kr$ と変数変換すると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{\epsilon_0 r} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dK \frac{\sin(K)}{K} \tag{16}$$

最後に公式

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を用いると、

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{17}$$

これはよく知られた点電荷が作る電位の式である。ここから $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi$ を計算すれば、クーロンの法則が得られる。証明終わり。