電磁気学 A(加藤担当) レポート No. 3, 4, 5 略解　講義後 Web 公開

レポート 3, 問題 1.

(a) 物体に沿って z 軸を取ると、$(0,0,z)$ から $(0,0,z+dz)$ の部分が $(a,0,0)$ につくる微小な電場は

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$$

となる。$(a,0,0)$ における電場 $\vec{E}$ はこれを $z=-\infty$ から $z=\infty$ まで積分したものであるが、z 成分は被積分関数が奇関数なので 0 となり、x 成分のみが残る。

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{ad\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{a}{a^3(1+\tan\theta)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\,\cos\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \end{aligned}$$

なお、途中で $z = a\tan\theta$ により、z から θ に変数変換を行っている。

(b) 直線状の物体を中心軸とした、半径 a, 高さ h の円柱を考え、ガウスの法則を適用する。電場 $\vec{E}$ は直線状の物体から離れる向きを向くため、円柱の上面・下面では面と電場は平行であり、円柱の上面・下面での面積分 $\int_{\text{上面・下面}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$ はゼロである。また側面を貫く電場は面と直交しているため、ガウスの法則は

$$\int_{\text{円柱の表面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi ah\times|\vec{E}| = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}(=\text{円柱内の電荷}/\varepsilon_0)$$

である。ここで電場は面と直交が直交しているときに、面積分が (面積) $\times|\vec{E}|$ となることを用いた。これより

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

レポート 3, 問題 2.

問題の図にあるような帯電面を含む上面・下面の面積 S, 高さ $2a$ の直方体を考え、ガウスの法則を適用する。電場 $\vec{E}$ は帯電面から離れる方向を向くので、直方体の側面では面と電場は平行であり、直方体側面での面積分 $\int_{\text{側面}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$ はゼロである。また、上面・下面を貫く電場は面と直交しているため、ガウスの法則は

$$\int_{\text{直方体の表面}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2S\times|\vec{E}| = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}(=\text{直方体内の電荷}/\varepsilon_0)$$

である (上面・下面の 2 つがあるので面積分の結果に 2 がつくことに注意)。これより、

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

レポート 4, 問題 1.

直線電流の中心軸上に中心をもつ半径 r の円 (円は中心軸に直交する面内にあるとする) を考え、そこでアンペールの法則を適用する。磁力線は金属線の内部を含めて軸対称で中心軸を周回していることを使うと、経路方向 (円の接線方向) と磁場は常に同じ方向を向き、磁場の線積分は $\int_{\text{円}} \vec{B}\cdot d\vec{r} = |\vec{B}|\times$ (経路の長さ である。$0<r<a$ のとき、アンペールの法則をかくと、

$$\int_{\text{円}} \vec{B}\cdot d\vec{r} = |\vec{B}|\times 2\pi r = \mu_0\frac{r^2}{a^2}I\ (=\mu_0\times(\text{円を貫く電流}))$$

である。ここで半径 r の円を貫く電流は、全電流 I のうち r^2/a^2 の部分のみであることを用いた。これを使うと、

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

$a < r$ のとき、アンペールの法則をかくと、

$$\int_{\text{円}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = |\vec{B}| \times 2\pi r = \mu_0 I \ (= \mu_0 \times (\text{円を貫く電流}))$$

である。さきほどの計算からの変更点は、半径 r の円を貫く電流が I となることだけである。これより、

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

レポート 4, 問題 2.

(1) 問題文中の経路 C_1 でアンペールの法則をかく。経路 C_1 の y 方向の長さを h とすると、面からの距離 r にかかわらず,

$$\int_{\mathrm{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = h(B_y - B'_y) = \mu_0 J h \ (= \mu_0 \times (\mathrm{C}_1\text{を貫く電流}))$$

である。ここで面から離れる方向に磁場の成分がないこと (問題文参照) から、経路の上辺と下辺からの線積分の寄与はないことを使った。対称性から $B'_y = -B_y$ となるので、

$$2hB_y = \mu_0 J h \quad \rightarrow \quad B_y = \frac{\mu_0 J}{2}$$

経路 C_2 の y 方向の長さを h とすると、面からの距離 r にかかわらず,

$$\int_{\mathrm{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = h(B_x - B'_x) = 0 \ (= \mu_0 \times (\mathrm{C}_2\text{を貫く電流}))$$

であり、$B_x = B'_x$ がいえる。これ以上はアンペールの法則からいえないが、これは電流 J を含まないので、$J = 0$ でも成立。よって $B_x = 0$ でないと電流 J がないときも磁場があることになって不合理。よって $B_x = 0$ となる。(レポート No.5 の問題プリントにも補足があるので確認してください。)

(2) (1) より磁場は y 方向を向く。磁場の重ね合わせより、

$$|\vec{B}| = |B_y| = \begin{cases} \mu_0 J & (0 < z < a) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

レポート 5, 問題 1.

(1) 経路 C を変数 θ によって媒介変数表示すると、

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad d\vec{r'} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\, d\theta \\ a\cos\theta\, d\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

これより

$$d\vec{r'} \times (\vec{r} - \vec{r'}) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\, d\theta \\ a\cos\theta\, d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az\cos\theta \\ az\sin\theta \\ a^2 \end{pmatrix}$$

θ の積分を行うと磁場の x, y 成分は 0 になるので、B_z のみ考えればよい。

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

(2) B_z は z の偶関数なので $z \to -z$ の入れ替えに対して値が変わらない。(1) の答えを $z = -\infty$ から $z = \infty$ まで積分すると、z から $z + dz$ の間には電流が ndz 回巻いていることに注意して、

$$\begin{aligned} B'_z &= \int_{-\infty}^{\infty} B_z \times n dz = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a d\theta}{\cos^2\theta} \frac{1}{a^3(1 + \tan^2\theta)^3} = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\, \cos\theta = \mu_0 n I \end{aligned}$$

なお、途中で $z = a\tan\theta$ により、z から θ に変数変換を行っている。