電磁気学 A(担当:加藤岳生)　試験問題
2015 年 12 月 25 日 5 時限 (試験時間 90 分), 解答用紙: 4 枚, 計算用紙: 1 枚, 持ち込み: 無

$\boxed{\text{第 1 問}}$　以下の問に答えよ。ただし、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ のとき、$\mathrm{grad} f (= \vec{\nabla} f)$, $\vec{\nabla}^2 f$ を計算せよ。

(2) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A} (= \vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ および $\mathrm{rot}\vec{A} (= \vec{\nabla} \times \vec{A})$ を計算せよ。

(3) 以下のベクトル場 $\vec{A}$ について、$\vec{A} = \mathrm{grad} f$ となるようなスカラー場 f が存在するか。存在する場合は f を具体的に求めよ。存在しない場合はその理由を説明せよ。

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}$,　　(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$

(4) 以下の 4 つの式のうち恒等式として正しいものを 2 つ選び、証明を示せ。ただし、f は任意のスカラー場、$\vec{A}$ は任意のベクトル場であるとする。

(a) $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = 0$,　(b) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$,　(c) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = 0$,　(d) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A}) = 0$.

(5) 以下の定理を図や数式を交えて説明せよ (式中に現れる文字・記号の説明を行うこと)。

(a) ガウスの定理,　　(b) ストークスの定理

(6) xy 平面中におかれた原点を中心とした半径 1 の円 ($x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$) 上を反時計回りに周回する経路を C とする。ベクトル場 $\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ について、線積分 $\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ を計算せよ。

(7) マックスウェル方程式の一つ

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

が意味する物理法則の名前を答え、簡単に説明せよ。「ストークスの定理」「起電力」の用語を必ず用いること。

第 2 問　静電場に関する以下の問いに答えよ。

(1) 図 (a) のように電荷密度 ρ で一様に帯電した半径 a の無限に長い円柱がある。ガウスの法則を利用して、円柱の中心軸から r だけ離れた点にある電場 $\vec{E}$ の大きさを r の関数として求め、グラフをかけ。導出の過程も記述すること。ただし、電場 $\vec{E}$ の向きは系の対称性から円柱の中心軸から離れる方向に向くことを利用してよい。

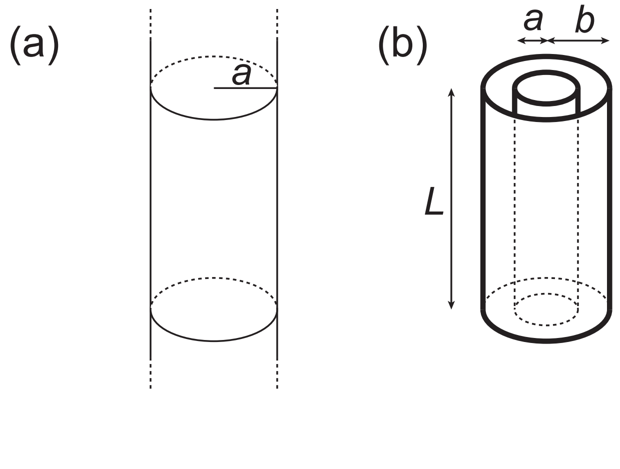
(2) 円柱が金属でできている場合には、電荷は円柱の表面にのみ分布する。円柱表面に生じる電荷の面密度 (単位面積あたりの電荷) を σ としたとき、ガウスの法則を利用して、円柱 (半径 a) の中心軸から r だけ離れた点にある電場 $\vec{E}$ の大きさを r の関数として求め、グラフをかけ。ただし円柱は十分長いとし、電場の向きについては (1) と同様に考えて良い。

(3) 一般に位置 $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ の間の電位差は、$\vec{r}_1$ から $\vec{r}_2$ に向かう経路 C 上の線積分によって

$$\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = -\int_{\mathrm{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

と書き表すことができる。この関係式が成り立つ理由を簡単に説明せよ。

(4) 図 (b) のように半径 $a, b(> a)$, 長さ L の金属製の中空の円筒を中心軸をそろえて置く。この 2 つの金属間の相互キャパシタンスを求めよ。必要があれば (3) の関係式を用いても良い。ただし、円筒の長さ L は十分長く、円筒の厚さは無視できるものとする。



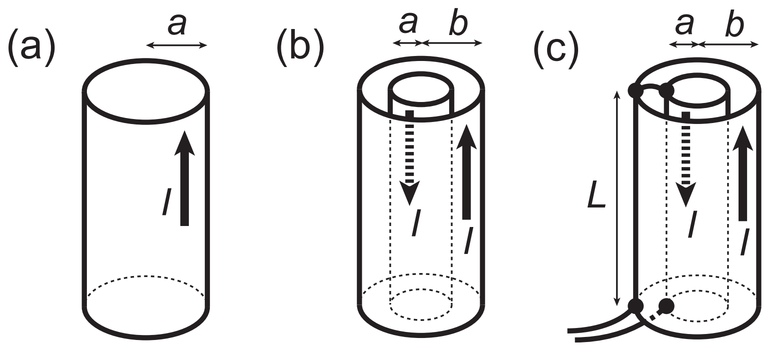
$\boxed{\text{第 3 問}}$ 定常電流がつくる磁場について、以下の問に答えよ。

(1) 図 (a) のように半径 a の金属製の十分に長い円筒 (内側は空洞になっているとする) に電流 I を流す。円筒の内部に磁場が生じないことを、アンペールの法則から説明せよ。ただし、対称性および $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ より、磁場 $\vec{B}$ の向きは中心軸および半径方向に直交する (電流の向きに対して右ねじの向きに磁力線が回る) ことを用いてよい。また、円筒の厚さは無視できるものとする。

(2) (1) で考えた円筒で、電流によって生じる磁場 $\vec{B}$ の大きさを、円筒の中心軸からの距離 r の関数として求め、グラフをかけ。

(3) 図 (b) のように中心軸のそろった半径 a, 半径 b の十分に長い金属製の円筒があり、内側と外側にそれぞれ大きさ I の電流を異なる方向に流す。磁場 $\vec{B}$ の大きさを円筒の中心軸からの距離 r の関数として求め、グラフをかけ。ただし、円筒の厚さは無視できるものとする。

(4) 図 (c) のように (3) で考えた 2 つの十分長い同軸円筒の片方の末端を導線でつなぎ、全体を一つの素子とみなす。素子の自己インダクタンスを求めよ。ただし、円筒の長さを L とする。



$\boxed{\text{問題 4}}$　以下の問に答えよ。

(1) 図 (a) のように電気容量 C のコンデンサ、自己インダクタンス L のコイル、スイッチを直列につないで回路をつくる。はじめ、コンデンサには電荷 Q_0 が蓄えられている。時刻 $t=0$ でスイッチをいれた後の回路が満たす微分方程式を書き下せ。またそれを解くことで、コンデンサの電荷 Q、回路を流れる電流 I を時刻 t の関数としてもとめよ。

(2) 電位 ϕ が z によらないような真空中 $(\rho=0)$ の静電場の問題を考えよう。このとき電位 $\phi(x,y)$ はポアソン方程式 ($\rho=0$ としたもの)

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

を満たす。今、複素数 $z=x+iy$ の解析関数を $f(z)$ として、複素関数 $w=f(z)$ を考える。w の実部を u、虚部を v とすると $(w=u+iv)$、コーシーの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つことを示すことができる (以下で証明せずに用いて良い)。これらを利用して、u, v がポアソン方程式 (1) を満たすことを示せ。さらに $v(x,y)$ を電位とみなすと、$u(x,y)=C$ (C は定数) できまる曲線は電気力線を表すことを示せ。また、$w=Az^{1/2}$(A は実数の定数) で与えられる複素関数の虚部 v を電位とみなした時、等電位線 $v=v_0$ を記述する曲線を $y^2=g(x)$ の形で求めよ。さらに、この等電位線が図 (b) に示すような一様に帯電した半無限面 ($y=0$, $x>0$) のまわりの電位を記述することを説明せよ。

(3) 図 (c) のように $z<0$ に金属をおき、位置 $(0,0,a)(a>0)$ に正の点電荷 q を置くと、点電荷のつくる電場により金属表面が負に帯電する。$z>0$ の空間で点電荷と金属表面の電荷がつくる電場 $\vec{E}$ を考えると、これは真空中に $(0,0,a)$ に点電荷 q, $(0,0,-a)$ に点電荷 $-q$ を置くときにできる電場と同一である ($z=0$ 面上で常に電場が面と垂直なので)。これを利用して、金属表面上の位置 $(x,y,0)$ での面電荷 $\sigma(x,y)$ を x, y の関数として求めよ。