電磁気学 A(担当:加藤岳生)　試験問題

2017 年 1 月 26 日 3 時限 (試験時間 90 分), 解答用紙: 4 枚, 計算用紙: 1 枚, 持ち込み: 無

$\boxed{\text{第 1 問}}$　以下の問に答えよ。ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(1) $f(x, y, z) = ax + by + cz(a,\ b,\ c$ は定数) のとき, $\mathrm{grad} f (= \vec{\nabla} f)$ を計算せよ。

(2) $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ のとき, $\mathrm{div}\vec{A} (= \vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ を計算せよ。

(3) ベクトル場 $\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して, $\mathrm{rot}\vec{A} (= \vec{\nabla} \times \vec{A})$ を計算せよ。

(4) xy 平面中におかれた原点を中心とした半径 a の円 ($x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$) 上を反時計回りに周回する経路を C とする。(3) のベクトル場 $\vec{A}$ について, 線積分 $\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ を計算せよ。

(5) (4) で求めた線積分は (3) の $(\mathrm{rot}\vec{A})_z$ の値に半径 a の円の面積をかけたものになっている。この結果に関連する数学の定理の名前を述べ, その定理の具体的な内容を数式を用いて説明せよ。

(6) 静磁場に対するマックスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

が物理法則として意味することを数式を用いて説明せよ。物理法則の具体的な名称, および「電流」「線積分」の用語を必ず含めること。

(7) $f(x, y, z) = 1/r$ のとき, $\mathrm{grad} f (= \vec{\nabla} f)$, $\vec{\nabla}^2 f$ を計算せよ。ただし, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ としてよい。

(8) 関数 $f(x, y, z)$ に対して, $\mathrm{grad} f (= \vec{\nabla} f)$ の向きは $f(x, y, z)$ の等高面 ($f(x, y, z) = C$ を満たす曲面, C は定数) と直交する理由を説明せよ。

(9) 帯電した金属の表面付近では, 電気力線が金属表面と直交する。その理由を説明せよ。

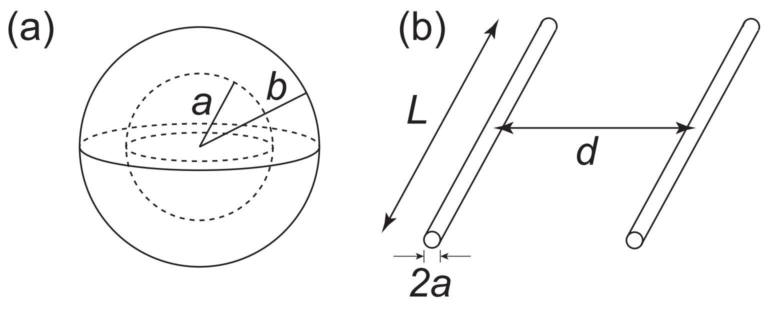
$\boxed{\text{第 2 問}}$　静電場に関する以下の問いに答えよ。真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(1) 面密度 σ で一様に帯電した無限に広い平板がある。ガウスの法則を用いて, 平板から距離 r の位置における電場 $\vec{E}$ の大きさを求めよ。導出の過程も記述すること。ただし, 電場 $\vec{E}$ の向きは系の対称性から平板に垂直であり, 平板の上下で逆向きであることを用いてよい。

(2) 図 (a) のように半径 a, $b(> a)$ の球面状の金属がある (金属の厚さは無視できるものとする)。内側の金属に電荷 Q を, 外側の金属に電荷 $-Q$ を, それぞれ帯電させたとき, 球の中心から r だけ離れた点における電場 $\vec{E}$ の大きさを, r の関数として求めよ。導出の過程も記述すること。ただし, 電場 $\vec{E}$ の向きは系の対称性から円の中心から離れる方向に向くことを利用してよい。

(3) (2) の系において, 静電場のもつエネルギーを計算せよ。

(4) 図 (b) のように半径 a, 長さ $L(\gg a)$ の細い金属棒 2 本を距離 $d(a \ll d \ll L)$ だけ離して平行におく。この 2 つの金属棒間の (相互) 電気容量 C を求めよ。ただし, 金属棒は十分長く, 金属棒の端における電場分布の変化は無視してよい。また, 一方の金属棒に蓄えられた電荷がもう一方の金属棒付近につくる電場は十分弱く, もう一方の金属棒における電荷分布を変えないものとせよ。



$\boxed{\text{第 3 問}}$ 定常電流がつくる磁場について, 以下の問に答えよ。真空の透磁率を μ_0 とする。

(1) 図 (a) のように十分細く無限に長い金属線に電流 I を流し, 一辺の長さが a, b の長方形の金属回路 (抵抗 R) を置く。回路と金属線間の距離 x のときに, 回路を貫く磁束を求めよ。また, 回路を一定の速さ v で図に示す向きに動かしたとき, 回路に流れる電流の大きさを求めよ。

以下の問では, 必要に応じて, ビオ・サバールの法則

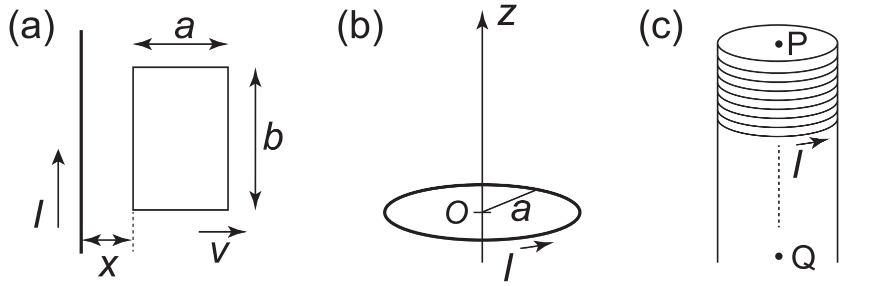
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathrm{C}} \frac{d\vec{r'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3},$$

を用いよ。ただし, C は電流経路である。

(2) 図 (b) のように半径 a の細い円状の金属線に電流 I を流す。円の中心を原点 O とし, 円は xy 平面内にあるとして, $(0, 0, z)$ における磁場 $\vec{B}$ の大きさを答えよ。ただし, 対称性から磁場の向きは z 軸方向であることを用いて良い。

(3) 図 (b) で z 軸に沿った経路 C に沿った磁場の線積分 $\int_{\mathrm{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B}$ は $\mu_0 I$ となることを示せ。また, この結果が意味することを, 具体的な法則名を交えて説明せよ。

(4) 図 (c) に示す長いソレノイドの端点 P(中心軸上) における磁場の大きさは, ソレノイド中央部の内部の点 Q の磁場の半分であることを示せ。



$\boxed{\text{問題 4}}$　以下の問に答えよ。

(1) 図 (a) のように抵抗 R, 自己インダクタンス L, 電気容量 C からなる回路がある。回路に交流電圧 $V(t) = V_0 \cos \omega t$ を加えたとき, 抵抗に流れる電流がゼロになるような周波数 ω を求めよ。計算過程も書くこと。

(2) 図 (b) のように, 半径 a, $b(> a)$ の同軸円筒状の金属容器に, 電気伝導率 σ の電解液が高さ h まで満たされている。内外の金属容器に一定の電圧をかけて, 電流 I を流すとき, 電解液中を流れる電流の電流密度 $\vec{j}$ の大きさを中心軸からの距離 r の関数として求めよ。また, 金属容器にかけられている電圧を求めよ。

(3) 図 (c) のように, 接地した半径 a の金属球がある。金属球の中心 O から d の距離に正電荷 q をおくと, 金属は負に帯電する。金属球のもつ電荷が球の外側に作る電場は, 中心 O と正電荷 q の間の線分上のある位置に負電荷 $-q'$ を置いたときにできる電場と同じである (鏡像法)。金属表面上の任意の点で電位が 0 となるように, 負電荷の大きさ q' と位置 (=球の中心からの距離) を定めよ。