電磁気学 A(加藤担当) 補充プリント　第 3 講配布 (2015.9.30)

このプリントでは、授業で十分に取り扱うことができなかった事項 (履修者は知っているものと仮定しているが、実はあまり知らないひともいるかも知れない事項) について、簡単にまとめるものです。

1　ベクトルの外積について

ベクトルの外積に馴染みがない人のために、最低限の知識をまとめる。

$$(定義)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{のとき、} \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

このベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は以下の様なベクトルである。

- $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き: $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に直交し、向きは右ねじで決める (図 1)。
- $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさ: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = (\vec{a}, \vec{b}$で張られる平行四辺形の面積).

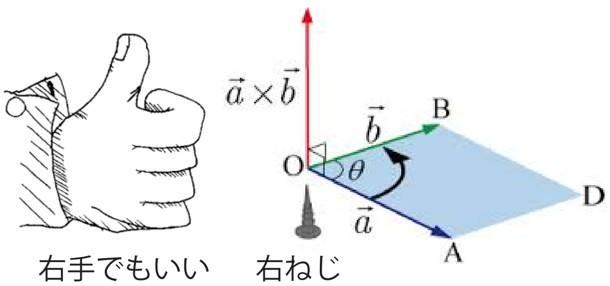

図 1: ベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き

証明：(向き) 実際に成分表示を使って $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ を示せばいい。(大きさ) 下記のような変形による。

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \end{aligned}$$

その他の性質としては、下記のようなものがある。

- 分配法則: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 定数倍: $\vec{a} \times (k\vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = k\vec{a} \times \vec{b}$ (k は定数)
- 交換則: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

これらの式は、成分表示による計算によって簡単に確かめることができる。まとめると、ベクトルの外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ はあたかも掛け算のように取り扱っていいが、掛ける順番をひっくり返すときに負号をつけないといけない点だけに注意する。

なお、すでに 3×3 行列の行列式公式 (サラスの公式) を学んでいる人は、

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$$

を成分計算で確かめることができる ($(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ は縦ベクトルを 3 つ並べてできる 3×3 行列, $\det A$ は A の行列式)。この式を使うと、$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{a}) = 0$ は行列式の性質から自明。

2　全微分公式の証明

全微分公式の証明をしていなかったので、簡単な直感的証明を行う。ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ についての全微分公式を示す (3 変数関数は推して知るべし)。

$$\text{(全微分公式)}\quad df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

(証明) 関数 $z = f(x,y)$ を考えると、これは (x,y,z) 空間中の曲面を表す (図 2 左)。ある点 (x,y) 近傍の曲面を切り出すと (図 2 右)、(x,y) のごく近傍では曲面は平面にみえる。x 方向に dx だけ動くときの f の変化は、そのときの変化率 (偏微分の定義より $\frac{\partial f}{\partial x}$) と移動距離 dx の積 $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ でかける。同様に y 方向に dy だけ動くときの f の変化は $\frac{\partial f}{\partial y}dy$。よって dx, dy が微小で、その範囲で曲面が平面によく近似できるときは、$df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$ は x 方向に dx, y 方向に dy 変化させたときの f の変化の「和」となる (図 2 右)。ゆえに全微分公式が示された。

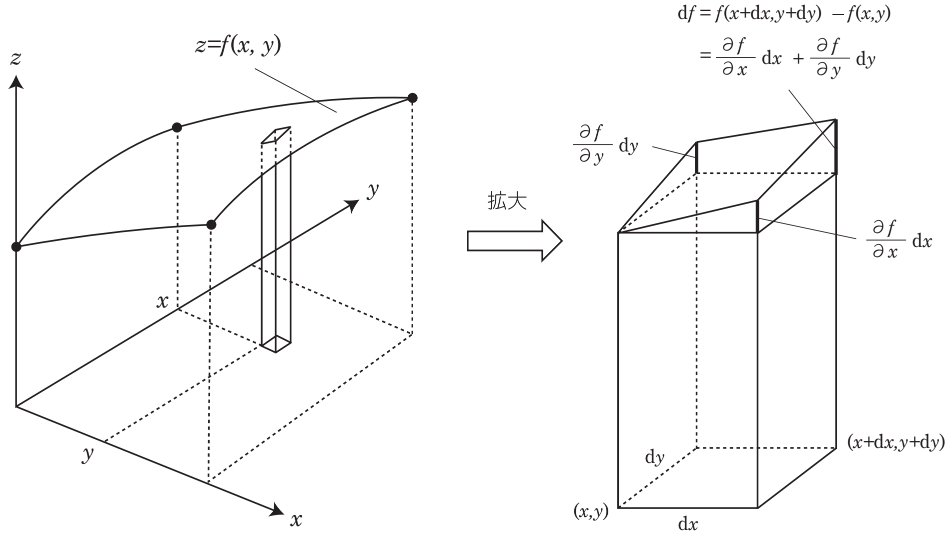

図 2: 全微分公式の証明のための図