レポート No.1:眠れぬ夜のために (解答編)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \tag{1}$$

を思い出す (第 1 講ノート参照). ここでさらに, y を固定しておくと, $z = z(x, y) \equiv f(x)$ は x のみの関数とみなせる. これを x について解くと $x = x(y, z)$ となるが, y を固定しているときは $x = x(y, z) \equiv g(z)$ は z の関数とみなせる. ここで, $z = f(x)$ と $x = g(z)$ は逆関数の関係にあるので, 逆関数の微分公式より

$$f'(x) = \frac{1}{g'(z)} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}$$

これを式 (1) に代入して整理すると, 問題の証明ができる.
(別証明) x, y, z の間の関係が $f(x, y, z) = 0$ で与えられるとする. 3 変数関数の全微分公式は, $u = f(x, y, z)$ とすると, $f_x = (\partial f/\partial x)$ などのように略記して,

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz \equiv f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

である (証明はしないが考え方は 2 変数と同じ). $u = f(x, y, z) = 0$ より, $du = 0$ が常にいえるので, $f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$ がいえ, ここから, 例えば z を固定したとすると, $dz = 0$ より,

$$f_x dx + f_y dy = 0 \to \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

ここで dy/dx は z を固定して計算しているので, $(\partial y/\partial x)_z$ と等しくなる. 同様に $(\partial z/\partial y)_x = -f_y/f_z$, $(\partial x/\partial z)_y = -f_z/f_x$ がいえる. これより,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right) \times \left(-\frac{f_y}{f_z}\right) \times \left(-\frac{f_z}{f_x}\right) = -1$$

眠れぬ夜のために (追加問題)

授業では取り上げきれなかったが, 自習すると熱力学の理解が深まる問題を追加しておく. 成績とは無関係だが, 我こそはという人は挑戦してほしい. 来週, 解答を配る.

眠れぬ夜のために 2.
1 モルのファンデルワールス気体を考える. 状態方程式と内部エネルギーは

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad U = f(T) - \frac{a}{V}$$

で与えられる. ただし, a, b, R は正の定数, $f(T)$ は T にのみ依存する関数である.
(1) 以下の式を示せ:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\frac{a}{C_V V^2}$$

(2) 定積モル比熱 C_V, 定圧モル比熱 C_p の間に以下の関係式が成り立つことを示せ:

$$C_p = C_V + \frac{p + a/V^2}{p - a/V^2 + ab/V^3} R$$

参考書について

アンケートで参考書のことについて聞かれたのでまとめておく．まず指定教科書はない．基本的には教科書がなくても, 授業をちゃんときいていれば, 熱力学の主要な内容についてはちゃんと身につくはずである．自習のために参考書を買いたい人は, 本屋で内容をぱらぱらみるか, アマゾンなり書評サイトの評判を見るかして, 適当に参考書を買うとよい．私の確認した教科書は販売されている教科書の一部だが, コメントしておく．参考になるかもしれない．

原島鮮著「熱力学・統計力学」(培風館) 熱力学で学ぶべきことが要領よくまとめられている教科書．昔からベーシックな教科書として知られており, 私の授業でも教える内容を決めるときに参考にしている．ただし, 偏微分は自由につかいこなせることが前提なので, 授業での数学の説明をよく理解したあとに読むのがいいかもしれない．統計力学についても, 様子がわかるであろう．

風間洋一著「熱力学入門講義」(培風館・現代物理学入門講義シリーズ) 熱力学における多変数関数の微積分の重要性を重視した教科書． 私と似た考え方をもっており, やはり私の授業で参考にしている．多変数関数解析の観点に重心がおかれている一方, 熱力学そのものの説明は簡潔で, 人によっては物足りないと感じるかもしれない．それでも必要十分の説明が与えられているので, オススメである．

エンリコ・フェルミ著「フェルミ熱力学」(三省堂) 古典的名著．私はまだきちんと目を通せていないが, 読んだ範囲内では極めて簡潔で, かつ要領を得た説明になっている．熱力学で本当に重要なことを絞り込んでかいてある．好きになれそうな本．ちょっと上級者向け?ランダウの力学が好きな人はいいかも．

富田博之著「『熱力学』講義ノート」(フリーの **PDF** テキスト) 無料の資料の中では, 一番よくできていると思う．検索すればすぐみつかるはずである．題材の取り上げ方がうまく, 熱力学の勘所を要領よくかいてあると思う．偏微分の説明も丁寧にしてある．無料なので, お金がない人にはオススメ．

田崎晴明著「熱力学ー現代的な視点から」(培風館・新物理学シリーズ) 公理論的熱力学という新しい立場から, 熱力学を組み立て直した斬新な本． 決して易しくはないが, 著者の物理に対する熱意はなみなみならぬものがあり, 多くの点で他の教科書にはない考え方・やり方が貫かれている．物理を志す人はもっておくとよいだろう．これで熱力学を初めて学ぶのは大変なので, 熱力学を一通り学んだあとに読んでみるのがいいかもしれない．

清水明著「熱力学の基礎」(東京大学出版会) 田崎本よりさらに公理論的な議論を徹底したもの．これが熱力学なのか, と思うほど抽象論になっており, 熱力学の数学的な構造がよくわかる本である．私の授業からはだいぶ距離があるが, 人によってはこれで熱力学にはまって, 物理を志す人が一学年に一人くらいいる．物理ラブの人で, そういう原理論的なことが好きな人は手にとってみると良い．

加藤岳生著「ゼロから学ぶ統計力学」(講談社) 統計力学をかじってみたい人は, この本からどうぞ．たぶん, 今の段階で読み切ることができると思う．わかりやすさ重視で, 数学的・物理的な厳密さを犠牲にしているので, これを読んで興味が湧いたら, さらに本格的な教科書を読んでみるとよい．