熱力学A(加藤岳生担当) 期末試験用の練習問題 第12講配布 (2019.7.15)

試験問題の勉強用に作成した練習問題です. 授業ノートを復習しながら, 問いてみてください. 期末試験では類似の問題を必ず出します. ただし, 優を正しく判定するため, 実力問題 (=類似ではない問題) も出します.

基本問題

問題1. 以下の関数 $f(x,y)$ に対して, 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ.
(1) $f(x,y)=x^2y+y^3$, (2) $f(x,y)=e^x\cos y$

問題2. 以下の2変数関数 $z=f(x,y)$ に対して, 全微分公式を微分形式を用いてかけ.
(1) $f(x,y)=x^2y+y^3$, (2) $f(x,y)=e^x\cos y$

問題3. 以下の微分形式が完全微分か, 不完全微分か, 判定せよ.
(1) $dz=3x^2y^2\,dx+2x^3y\,dy$, (2) $dz=\cos y\,dx-x\sin y\,dy$

問題4. 以下の偏微分に関する恒等式を示せ. [Hint: (3) は (1),(2) を組み合わせる.]
(1) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)_y=1$ (2) $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ (3) $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)_y=-1$

問題5. 理想気体の定積モル比熱を C_V, 定圧モル比熱を C_P とし, 気体定数を R としたとき, マイヤーの関係式 $C_P-C_V=R$ を導け.

問題6. 理想気体の準静的断熱過程において, ポアソンの関係式 $PV^\gamma=\mathrm{const.}$ を導き, γ を定積モル比熱 C_V と定圧モル比熱 C_P によってあらわせ.

問題7. 理想気体のエントロピーを温度 T, 体積 V の関数として求めよ. また準静的断熱過程において, エントロピーが一定であることを確かめよ.

問題8. エントロピーの数値計算:
(1) 単原子分子の理想気体1モルが0°C, 1気圧から100°C, 2気圧に変化したときのエントロピー変化を求めよ. 理想気体の定圧モル比熱を $C_P=(5/2)R=20.8\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ とする. [Hint: 問題7の答えを用いてよい.]
(2) 20°C の室内で -5°C の氷100g が融けて 20°C の水になるときのエントロピー変化を求めよ. また室内と氷をあわせた全系のエントロピー変化はどうなるか. 氷の定圧比熱を $2.10\mathrm{J}\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, 水の定圧比熱を $4.19\mathrm{J}\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, 氷の融解熱を $333\mathrm{J}\cdot\mathrm{g}^{-1}$ とする. ただし, 室温は変化しないものとする.

問題9. 熱力学の第一法則を, 内部エネルギー, 体積, エントロピーの微小変化, dU, dV, dS の関係式 (微分形式) としてかけ. また, ヘルムホルツの自由エネルギー, エンタルピー, ギブスの自由エネルギーの定義を書き, それらの微小変化について微分形式としてかけ. 最後にこの4つの微分形式から導かれる8つの熱力学関係式および4つのMaxwell関係式を導け. (最終的には教科書をみなくてもかけるようにせよ!)

問題10. クラペイロン-クラウジウス関係式 $\dfrac{dP}{dT}=\dfrac{q(T)}{T(V_L-V_S)}$ を利用して, 氷の融点が圧力によってどのように変化するかを議論せよ (V_L は液体の体積, V_S は固体の体積, $q(T)$ は潜熱). $0°C$ における氷および水の1g辺りの体積はそれぞれ $1.0907\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}$, $1.00013\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}$, 氷の潜熱を335J/g とする. 特に気圧を1気圧から2気圧にしたとき, 融点はどれくらい変化するか, 概算せよ.

応用問題

問題 11. 以下の 4 つの準静的過程からなるサイクル (Otto サイクルという) を考える. (a) 体積 $V = V_1$ での準静的等積加熱 ($T_A \to T_B$, $T_B > T_A$), (b) 体積 $V = V_1$ から体積 $V = V_2$ への準静的断熱膨張 ($T_B \to T_C$, $T_B > T_C$), (c) 体積 V_2 における準静的等積冷却 ($T_C \to T_D$, $T_C > T_D$), (d) 体積 $V = V_2$ から体積 $V = V_1$ への準静的断熱圧縮 ($T_D \to T_A$, $T_D < T_A$). 作業物質を理想気体とし、その比熱比を γ とすると、このサイクルの熱効率が $\eta = 1 - \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ となることを示せ。またこの熱効率は準静的カルノーサイクルより低いことを示せ。

問題 12. 以下のエネルギー方程式を導出せよ:

(1) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$ (2) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$

問題 13. 以下の式を示せ: $U = -T^2\left(\dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{F}{T}\right)\right)_V.$

問題 14. U を内部エネルギー, $H = U + PV$ をエンタルピーとして、以下の式を示せ:
(1) $C_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V,$ (2) $C_P = \left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_p.$

本当に眠れぬ夜のために

問題 15. 等温圧縮率を $\kappa_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, 断熱圧縮率を $\kappa_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ と定義する。このとき一般に $\kappa_S = \dfrac{C_V}{C_P}\kappa_T$ が成立することを下記の手順に従って示せ:

(1) 断熱条件 ($dQ = dU + p\,dV = 0$) を、内部エネルギーを $U = U(P, V)$ と P,V の関数とみなして書き直し、$\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_S$ を P, $\left(\dfrac{\partial U}{\partial P}\right)_V$, $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_P$ で書きあらわせ。断熱条件ではエントロピーは変化しないことに注意。

(2) $U = U(T, V)$ と T, V の関数とみて、$\left(\dfrac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ を C_V と $\left(\dfrac{\partial T}{\partial P}\right)_V$ で書きあらわせ。問題 4 の (2) の式を用いてよい。[注意: この設問は断熱条件ではない.]

(3) $U = U(T, P)$ と T, P の関数とみて、$\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_P$ を P, C_P と $\left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ で書きあらわせ。

(4) (2), (3) の結果を (1) に代入することで、$\kappa_S = \dfrac{C_V}{C_P}\kappa_T$ を示せ。問題 4 の (3) の式を用いてよい。