熱力学 A(加藤岳生担当) レポート No. 1　第 1 講配布 (2019.4.8), 次週までに提出

問題 1. 以下の関数 $f(x, y)$ に対して, 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $f(x, y) = x^3 + y^3$,　　(2) $f(x, y) = e^{2x+y}$

問題 2. 重力加速度 g のもとで長さ L の振り子の振動周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ で与えられる.

(1) 全微分公式を用いて, 長さおよび重力加速度の微小変化 dL, dg に対する振動周期の微小変化 dT を求めよ.
(2) (1) の答を用いて, 以下の式が成り立つことを示し, 定数 α, β を求めよ.

$$\frac{dT}{T} = \alpha\frac{dL}{L} + \beta\frac{dg}{g}$$

(3) 重力加速度が 2%, 振り子の長さが 1%増加したとき, 振り子の周期はおよそ何%増加するか.

アンケート. 講義に関する疑問や感想を書いてください. 自由に書いてください. なお、ここで書いてもらった内容は、加藤個人のホームページ

http://kato.issp.u-tokyo.ac.jp/kato

に掲載したいと思います. 匿名としますが、掲載がいやな人はそのようにかいてください. なお上記のページには、補充プリントや小レポートの問題なども掲載しますので、欠席した方はチェックしてみてください.

眠れぬ夜のための問題. (暇な人は解いてください. 成績とは関係ありません.)
問題 3 以下の等式を証明せよ.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1$$

[ヒント] 授業で示した等式を用いて証明することができるが, x, y, z の間に $f(x, y, z) = 0$ の関係があるとしてやったほうが見通しはよい.

問題 4 [合成関数の微分公式 1(Chain rule 1)]
(1) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ がある.x, y がそれぞれ $x = g(t)$, $y = h(t)$ と t の関数としてかけたとしたとき、z は t の関数となる. 以下の合成関数の微分公式を導け:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}h'(t).$$

ここで $g'(t)$, $h'(t)$ はそれぞれ $g(t)$, $h(t)$ の t に関する導関数である. [ヒント] 数学的にちゃんとやろうとするとやや面倒であるが、ここでは全微分公式を用いて、微分 dx, dy をあたかも数のように取り扱って示して構わない.
(2) $f(x, y) = x^2y$, $g(t) = 2t$, $h(t) = t^2$ のとき、(1) で示した公式が確かに成り立つことを確かめよ.

[裏面に続く]

問題 5 [合成関数の微分公式 2(Chain rule 2)]
(1) 2 変数関数 $z = f(x, y)$ がある.x, y がそれぞれ $x = g(t, s)$, $y = h(t, s)$ と t, s の 2 変数関数としてかけたとしたとき、z は t, s の 2 変数関数となる. 以下の合成関数の微分公式を導け:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t},$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial s},$$

[ヒント] ここでも全微分公式を用いて、微分 dx, dy をあたかも数のように取り扱って示して構わない.
(2) $f(x, y) = x^2 y$, $g(t, s) = 2t + s$, $h(t, s) = t + 2s$ のとき、(1) で示した公式が確かに成り立つことを確かめよ.