熱力学A(加藤岳生担当) レポートNo. 3　第7講配布 (2018.6.10), 次週までに提出

問題1. 授業では、熱力学の第二法則にはいくつかの言い方があることを述べた。授業では、以下の原理を熱力学の第二法則として採用している:

ケルビンの原理 一つの熱源から正の熱を受け取り、これをすべて仕事に変え、他に何の痕跡を残さないようにすることは不可能である。

一方、これと同等の言い方として以下のものがある:

クラウジウスの原理 低温の熱源から高温の熱源に正の熱を移す以外に、他に何の痕跡も残さないようにすることは不可能である。

準静的 (可逆) カルノーサイクルをうまく利用して、この2つの原理が同等であることを示せ。つまり、ケルビンの原理が成り立てばクラウジウスの原理も成り立つこと、およびその逆を示せ。

[ヒント:対偶をとって示す。熱力学では有名な問題で、教科書・ネットに答えがあります。もしわからなかったら、それらを参考にして構いませんが、自分なりにちゃんと理解した上でレポートにまとめてください。本によっては「トムソンの原理」と書いてあるかもしれませんが、ケルビンとトムソンは同一人物です!]

問題2 以下の問に答えよ。(1) エントロピーの定義 $dS = dq/T$ を熱力学の第一法則 $dU = -p\,dV + dq$ を組み合わせると、dS を p, T, dV, dU で書くことができる。これとエントロピー $S = S(U, V)$ の全微分公式を組み合わせることで、以下の二式を示せ:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}.$$

(2) エントロピー S が内部エネルギー U, 体積 V の関数として、

$$S = S(U, V) = nR\log(U^\alpha V^\beta) + \text{const.}$$

で与えられるような物質がある。(1) で導出した2式を用いて、エネルギー U および圧力 p を求めよ。

アンケート. 講義に関する疑問や感想を書いてください. 初回は戸惑って書いていない人も多かったのですが, 授業の進度・難易度や授業で印象に残ったことを書いていただけると, 励みになります. 本当に書くことがなければ、オススメの漫画・小説・映画・曲などをかいてください。なお, ここで書いてもらった内容は, 加藤個人のホームページ

http://kato.issp.u-tokyo.ac.jp/kato

に掲載します. 匿名としますが, 掲載がいやな人はそのようにかいてください. なお上記のページには, 補充プリントや小レポートの問題なども掲載しますので, チェックしてみてください.

眠れぬ夜のために4:解答編

問題4-1. 二次元平面内の反時計回りに回る閉じた経路をC, その内側の面積領域をS、$P(x, y)$, $Q(x, y)$ を x, y についての2変数関数としたとき、以下の定理が成立する (グリーンの定理):

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C Pdx + Qdy$$

(1) この定理を証明せよ。

[解答] 図 1 のように経路 C(内側領域 S, 範囲 $a \le x \le b$ かつ $c \le y \le d$) および座標軸 x-y をとる。位置 x における経路 C の下端と上端の位置を $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$、位置 y における経路 C の左端と右端を $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ とおく。このとき、

$$\int_S dxdy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_c^d dy \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \frac{\partial Q}{\partial x} \right] = \int_c^d dy [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] = \int_C dy Q(x, y)$$

となる。最後の等式では経路 C が $x = x_2$ で y が増える方向に、$x = x_1$ では y が減る方向に積分されていることを反映して、符号を経路 C の積分方向に押し付けている。同様に

$$\int_S dxdy \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) = -\int_a^b dx \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \frac{\partial P}{\partial y} \right] = \int_a^b dx [-P(x, y_2(x)) + P(x, y_1(x))] = \int_C dx P(x, y)$$

以上の 2 式を辺々足し合わせることで、グリーンの定理が示される.

(2) グリーンの定理を用いて、以下の命題を証明せよ:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ は完全微分}$$

[解答] $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ のとき、グリーンの定理より任意の閉じた経路 C に対して、$\displaystyle\int_C Pdx + Qdy = 0$. 図 2 のように始点と終点が同じ二つの経路 C_1, C_2 があったとすると、経路 C_1 を順方向に動いたあと、経路 C_2 を逆方向に動いてもとに戻る経路を閉経路 C とみなすことで、

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{C}} Pdx + Qdy = \int_{\mathrm{C}_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\mathrm{C}_2} (Pdx + Qdy) = 0 \\ \longleftrightarrow \quad &\int_{\mathrm{C}_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\mathrm{C}_2} (Pdx + Qdy) \end{aligned}$$

がいえる。つまり $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ のとき、任意の閉じていない経路 C について線積分 $\int_C Pdx + Qdy$ が経路 C の始点と終点のみに依存し、途中の経路の形に依存しないことがわかる。ここで、経路 C の始点を (x_0, y_0), 終点を (x, y) とおき, $f(x, y) = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} Pdx + Qdy$ と定義する。このとき、

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \int_{\mathrm{C}'} Pdx + Qdy \quad (\mathrm{C}' \text{ は } (x, y) \text{ から } (x + dx, y + dy) \text{ への微小経路})$$

となる。 微小経路における積分の値は $Pdx + Qdy$ であるので、$df = Pdx + Qdy$ となり、確かに微分形式が $Pdx + Qdy$ となるような関数 $f(x, y)$ が存在する。なお、$f(x, y)$ は一意ではなく、経路 C の始点の位置 (x_0, y_0)(基準点という) によって定数分だけかわってもよい。

図 1

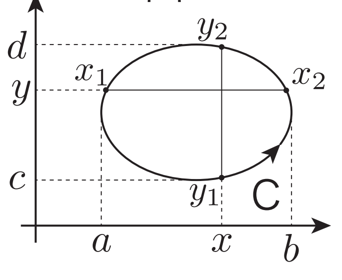

図 2