熱力学 A(加藤岳生担当) 補充プリント 第 2 講配布 (2019.4.22)

第一回レポートにあった「眠れぬ夜に」の問題の解答、および、第一回授業の補足をします。

問題 3 (偏微分の一般)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \tag{1}$$

を思い出す (第 1 講ノート参照). ここでさらに, y を固定しておくと, $z = z(x, y) \equiv f(x)$ は x のみの関数とみなせる. これを x について解くと $x = x(y, z)$ となるが, y を固定しているときは $x = x(y, z) \equiv g(z)$ は z の関数とみなせる. ここで, $z = f(x)$ と $x = g(z)$ は逆関数の関係にあるので, 逆関数の微分公式より

$$f'(x) = \frac{1}{g'(z)} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}$$

これを式 (1) に代入して整理すると, 問題の証明ができる.

(別証明) x, y, z の間の関係が $f(x, y, z) = 0$ で与えられるとする. 3 変数関数の全微分公式は, $u = f(x, y, z)$ とすると, $f_x = (\partial f/\partial x)$ などのように略記して,

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz \equiv f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

である (証明はしないが考え方は 2 変数と同じ). $u = f(x, y, z) = 0$ より, $du = 0$ が常にいえるので, $f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$ がいえ, ここから, 例えば z を固定したとすると, $dz = 0$ より,

$$f_x dx + f_y dy = 0 \to \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

ここで dy/dx は z を固定して計算しているので, $(\partial y/\partial x)_z$ と等しくなる. 同様に $(\partial z/\partial y)_x = -f_y/f_z$, $(\partial x/\partial z)_y = -f_z/f_x$ がいえる. これより,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right) \times \left(-\frac{f_y}{f_z}\right) \times \left(-\frac{f_z}{f_x}\right) = -1$$

問題 4 [合成関数の微分公式 1(Chain rule 1)]

(1) 全微分の公式 $dz = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy$ の両辺を dt で割ると、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(t).$$

(2) $z = f(x, y) = x^2 y$ に $x = 2t$, $y = t^2$ を代入すると、$z = 4t^4$ となるので $dz/dt = 16t^3$. 一方、$(\partial f/\partial x) = 2xy$, $(\partial f/\partial y) = x^2$, $g'(t) = 2$, $h'(t) = 2t$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x} g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} h'(t) = 2xy \times 2 + x^2 \times 2t = 2 \times 2t \times t^2 \times 2 + 4t^2 \times 2t = 16t^3.$$

となって公式が確かに成り立つ。

問題 5 [合成関数の微分公式 1(Chain rule 2)]

(1) 全微分の公式 $dz = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy$ に、$x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ に対する全微分公式 $dx = (\partial g/\partial s)ds + (\partial g/\partial y)dt$, $dy = (\partial h/\partial s)ds + (\partial h/\partial y)dt$ を代入すると、

$$dz = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\right] dt + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial s}\right] ds$$

これと $z=z(t,s)$ と思ったときの全微分公式 $dz=(\partial z/\partial t)dt+(\partial z/\partial s)ds$ を比較すれば、題意を得る。
(2) $z=f(x,y)=x^2y$ に $g(s,t)=2t+s,\ h(s,t)=t+2s$ を代入すると、$z=(2t+s)^2(t+2s)=4t^3+12t^2s+9ts^2+2s^3$ となるので $\partial z/\partial t=12t^2+24ts+9s^2$. 一方、 $(\partial f/\partial x)=2xy$, $(\partial f/\partial y)=x^2$, $(\partial g/\partial t)=2$, $(\partial h/\partial t)=1$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}=2xy\times 2+x^2\times 1=4(2t+s)(t+2s)+(2t+s)^2=12t^2+24ts+9s^2$$

となって公式が確かに成り立つ。

第一講の補足

今は高校のカリキュラムで横ベクトルしかやらないとのこと、軽く補足する。大学の物理ででてくるベクトルはたいてい縦ベクトルである:

$$\text{横ベクトル}\quad \vec{v}=(a\ b)\quad\leftrightarrow\quad\text{縦ベクトル}\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}. \tag{2}$$

単に成分を縦に書いただけである。縦ベクトルでも内積をドットで表す:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \text{のとき}\quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax+by. \tag{3}$$

授業では、陰関数 $z=f(x,y)=C$(定数) に対して、全微分公式および $dz=0$ より

$$dz=0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

を導いた。直交関係は $dz=0$ からの帰結である。

眠れぬ夜に (第二弾)

問題 2-1 第一講で陰関数 $z=f(x,y)=C$(定数) の微分に関する一般公式を説明した。

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z=-\frac{(\partial z/\partial x)_y}{(\partial z/\partial y)_x} \tag{4}$$

授業後に以下の質問を受けた。「z を一定に保つようにして決めた図形の微分に、なぜ $(\partial z/\partial x)_y$ のような z を動かす微分が必要なのか？」あなたが良き教師だとして、なんと説明するか？

問題 2-2 (平均自由行程) 標準状態 (0 °C, 1 気圧, 1 mol) にある窒素の体積を $v_0(=0.0224\ \mathrm{m}^3)$, アボガドロ数を N_A, 窒素分子を直径 d の球と近似したとき、窒素分子の平均自由行程が $l=v_0/(\pi d^2 N_\mathrm{A})$ で与えられることを示し、標準状態で $d=1\ \text{Å}=10^{-10}\ \mathrm{m}$ として、具体的に値を求めよ。 (ヒント:ネットに情報がいくらでもころがってます。)

問題 2-3 (フェルミ推定) 必要最小限の情報からざっくりした推定をおこなうことをフェルミ推定と呼ぶ (語源はネット参照)。常圧・室温付近で液体と気体の体積は 1000 倍異なることと、分子のおおよその大きさ $d=1$ Å を用いて、平均自由行程を見積もれ。