熱力学 A(加藤岳生担当) 補充プリント 第 6 講配布 (2019.5.29)

線積分

熱力学ででてくる微分を含む式 ($dU = -pdV + TdS$ など) を微分形式と呼ぶが、この微分形式と関連の深い数学の道具に「線積分」がある。授業では取り上げる時間がないのでやらないが、知っておくと熱力学の理解が深まるので簡単に取り上げる (もちろん試験の範囲外なので余計な心配はしなくてよい)。微分形式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ が与えられたとき、xy 平面中の向き付き経路 C での線積分を以下のように定義する:

$$\int_{\mathrm{C}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left[P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right]. \tag{1}$$

ここで経路 C は図 (a) のように N 個の区間 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_N$ にするものとし、区間 $\mathrm{C}_i (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ 上の点を (x_i, y_i) としている ((x_i, y_i) は区間 C_i 上にあれば、どこにとってもよい)。さらに $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ は区間 C_i の始点と終点を結ぶ変位ベクトルである。

実際にこのような線積分で記述される物理量としては、外力 $\vec{F}$ がする仕事 W が挙げられる。実際に、経路 C 上を動く物体に外力 $\vec{F}$ がかかっていたとすると、経路 C 上の微小変位 $d\vec{r}$ でする仕事 dW は、

$$dW = |\vec{F}| \times |d\vec{r}| \times \cos\theta = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy \tag{2}$$

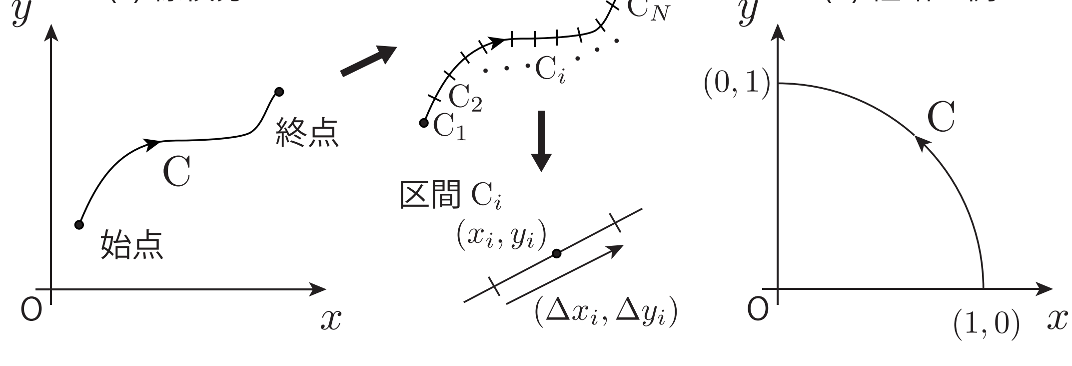
となる (ここで θ は外力と微小変位のなす角である)。よって、経路 C の始点から終点までで外力がする仕事 W は、$W = \int F_x dx + F_y dy$ という線積分で書き表されることになる。一般に外力 F_x, F_y は位置 x, y の関数であることに注意しよう。

線積分の計算方法は簡単である。例として図 (b) の xy 平面上の $(1, 0)$ から $(0, 1)$ までの原点を中心とする半径 1 の円孤 C を考え、そこでの線積分 $\int_{\mathrm{C}}(-y)dx + x\,dy$ を計算してみよう。この円弧は媒介変数によって $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ $(0 \le t \le \pi/2)$ と書き表されるので、

$$\int_{\mathrm{C}}(-y)dx + x\,dy = \int_0^{\pi/2} dt\left[(-y)\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right] = \int_0^{\pi/2} dt\left[-\sin t\times(-\sin t) + \cos t\times\cos t\right] = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

で計算できる。最初の等式では、被積分関数を dt かけて dt 割るような変形である (数学的に証明できるが、合成関数の積分公式と同じことをするだけなので、略)。

<u>練習問題</u>. xy 平面上の $(1, 0)$ から $(0, 1)$ までを結ぶ線分を経路 C としたとき、$\int_{\mathrm{C}}(-y)dx + x\,dy$ を求め、上記の値と異なること (=線積分は経路 C の取り方に依存すること) を示せ。[答えは 1。Hint: 線分の媒介変数表示]



練習問題からわかるように線積分は一般に経路 C に依存する。しかし、特別な形の微分形式に対して線積分は経路 C に依らなくなる。具体的には以下の定理が知られている。

線積分の基本定理 $f(x,y)$ は任意の 2 変数関数、経路 C は始点 (x_1,y_1) から終点 (x_2,y_2) を結ぶ経路とするとき、以下の線積分は始点と終点の位置にのみ依存し、経路によらなくなる:

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)$$

この定理は通常の積分の基本定理

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}dx = F(b) - F(a)$$

を線積分に拡張したものである。線積分の基本定理のざっくりとした証明は以下の通り。$z=f(x,y)$ とすると全微分公式 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ より、

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy &= \int_{\mathrm{C}} dz = (z\text{ の微小変化を経路 C 上で足し合わせたもの})\\ &= (\text{経路 C 上での } z \text{ の変化量の合計値}) = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_2).\end{aligned}$$

イメージとしては山登りを思い浮かべれば良い (x,y: 位置, z: そこでの高さ)。この定理の応用として、物体に働く重力 $\vec{F}=(F_x,F_y)=(0,-mg)$ を考えよう。$V(x,y)=mgy$ とおくと、$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$, $F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}$ とかけることが簡単に確認できる。このとき、線積分の基本定理から、重力がした仕事は経路 C の始点と終点のみによっており、$\int_{\mathrm{C}} F_x dx + F_y dy = -V(x_2,y_2)+V(x_1,y_1)$ とかける (V の定義にマイナスがかかっていることに注意)。これは重力のした仕事が始点と終点の位置エネルギーの差でかけることを意味する。

補足:完全微分と不完全微分

授業で完全微分・不完全微分を以下のように定義した:

$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ が完全微分である} \leftrightarrow z=f(x,y) \text{ となる関数 } f(x,y) \text{ が存在する}$$
$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ が不完全微分である} \leftrightarrow z=f(x,y) \text{ となる関数 } f(x,y) \text{ が存在しない}$$

完全微分・不完全微分の判別法については、以下の定理が成り立つ:

$$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ が完全微分である} \leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

まず→の証明はほぼ自明である (全微分公式と $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ を用いる)。←の証明はやや厄介であるので、眠れぬ夜の問題として残しておく。

眠れぬ夜に (第 4 弾) [成績とは無関係．意欲ある人向け．来週, 解答を配る．]

問題 4-1. 二次元平面内の反時計回りに回る閉じた経路を C, その内側の面積領域を S、$P(x,y)$, $Q(x,y)$ を x, y についての 2 変数関数としたとき、以下の定理が成立する (グリーンの定理):

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C Pdx + Qdy$$

(1) この定理を証明せよ。[Hint: 有名な定理なのでネットで調べればわかる。電磁気をやったひとなら、ストークスの定理とほぼ同じ証明を考えればよい。]
(2) グリーンの定理を用いて、以下の命題を証明せよ:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ は完全微分}$$