電磁気学 A(加藤担当) レポート No. 1 の解答　第 2 講配布 (2016.10.5)

問題 1. 授業で述べたように、レポートで考えるベクトル場 $\vec{A}$ はすべて $\vec{A}=\begin{pmatrix} A_x(x,y) \\ A_y(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしている。つまり、$\vec{A}$ の z 成分は 0 で、かつ x 成分と y 成分は z に依存していない。このとき rot$\vec{A}$ および div$\vec{A}$ は

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(A_y(x,y)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(A_x(x,y))-\frac{\partial}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial}{\partial x}(A_y(x,y))-\frac{\partial}{\partial y}(A_x(x,y)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(A_x(x,y))+\frac{\partial}{\partial y}(A_y(x,y))+\frac{\partial}{\partial z}(0)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}$$

となる (途中で、A_x, A_y が z に依存しないことから、$\frac{\partial A_x}{\partial z}=\frac{\partial A_y}{\partial z}=0$ を使っている)。特に rot$\vec{A}$ は z 成分しかもたない。div$\vec{A}$ および $(\mathrm{rot}\vec{A})_z$ を求めるには、偏微分の計算を丹念に行えば良い。例えば、x に関する偏微分では、y をあたかも定数と考えて、普通に x で微分すればよい。例えば、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x)=1,\quad \frac{\partial}{\partial x}(y)=0,$$

である。同様に、y に関する偏微分では、x をあたかも定数と考えて、普通に y で微分すればよい。例えば、

$$\frac{\partial}{\partial y}(x)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}(y)=1,$$

である。

(1) $\vec{A}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(a)+\frac{\partial}{\partial y}(b)=0,\quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(b)-\frac{\partial}{\partial y}(a)=0.$

(2) $\vec{A}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(0)=1,\quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(0)-\frac{\partial}{\partial y}(x)=0.$

(3) $\vec{A}=\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(0)+\frac{\partial}{\partial y}(x)=0,\quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(0)=1.$

(4) $\vec{A}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)=2,\quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(y)-\frac{\partial}{\partial y}(x)=0.$

(5) $\vec{A}=\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(-y)+\frac{\partial}{\partial y}(x)=0,\quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)=2.$

(6) $\vec{A}=\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(y)+\frac{\partial}{\partial y}(x)=0,\quad (\mathrm{rot}\vec{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(x)-\frac{\partial}{\partial y}(y)=0.$

(7), (8) については、$1/r^2$ を x, y でそれぞれ偏微分したときの計算を先にしておくとよい。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right)=-\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{2}{r^3}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2})=-\frac{2}{r^3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{2x}{r^4}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right)=-\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{2}{r^3}\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2+y^2})=-\frac{2}{r^3}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{2y}{r^4}$$

計算の途中で、$r=\sqrt{x^2+y^2}$ を x で偏微分する計算があるが、これは y を定数とみなして x で通常の微分を実行すればよい。y で偏微分する場合は、逆に x を定数とみなして、y の微分を実行する。これらを用いると、

(7) $\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{x}{r^2}\\ \frac{y}{r^2}\\ 0\end{pmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{1}{r^2}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{1}{r^2}+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right)\\
&=\frac{1}{r^2}+x\left(-\frac{2x}{r^4}\right)+\frac{1}{r^2}+y\left(-\frac{2y}{r^4}\right)=\frac{2}{r^2}-\frac{2(x^2+y^2)}{r^4}=0,\\
\mathrm{rot}\vec{A}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right)-x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right)\\
&=y\left(-\frac{2x}{r^4}\right)-x\left(-\frac{2y}{r^4}\right)=0,
\end{aligned}$$

(8) $\vec{A}=\begin{pmatrix}-\frac{y}{r^2}\\ \frac{x}{r^2}\\ 0\end{pmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)=-y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right)+x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right)\\
&=-y\left(-\frac{2x}{r^4}\right)+x\left(-\frac{2y}{r^4}\right)=0,\\
\mathrm{rot}\vec{A}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{r^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{1}{r^2}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{1}{r^2}+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^2}\right)\\
&=\frac{1}{r^2}+x\left(-\frac{2x}{r^4}\right)+\frac{1}{r^2}+y\left(-\frac{2y}{r^4}\right)=\frac{2}{r^2}-\frac{2(x^2+y^2)}{r^4}=0.
\end{aligned}$$