電磁気学 A(加藤担当) 補充プリント　第 1 講配布 (2017.9.27)

全微分公式の証明

講義では全微分公式は知っていることを前提にする。忘れてしまった人のために、証明の概略を示す。ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ についての全微分公式を示す (3 変数関数は推して知るべし)。

$$(\text{全微分公式}) \qquad df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

(証明) 関数 $z = f(x,y)$ を考えると、これは (x,y,z) 空間中の曲面を表す (図 1 左)。ある点 (x,y) 近傍の曲面を切り出すと (図 1 右)、(x,y) のごく近傍では曲面は平面にみえる。x 方向に dx だけ動くときの f の変化は、そのときの変化率 (偏微分の定義より $\frac{\partial f}{\partial x}$) と移動距離 dx の積 $\frac{\partial f}{\partial x}dx$ でかける。同様に y 方向に dy だけ動くときの f の変化は $\frac{\partial f}{\partial y}dy$。よって dx, dy が微小で、その範囲で曲面が平面によく近似できるときは、$df = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$ は x 方向に dx, y 方向に dy 変化させたときの f の変化の「和」となる (図 1 右)。ゆえに全微分公式が示された。

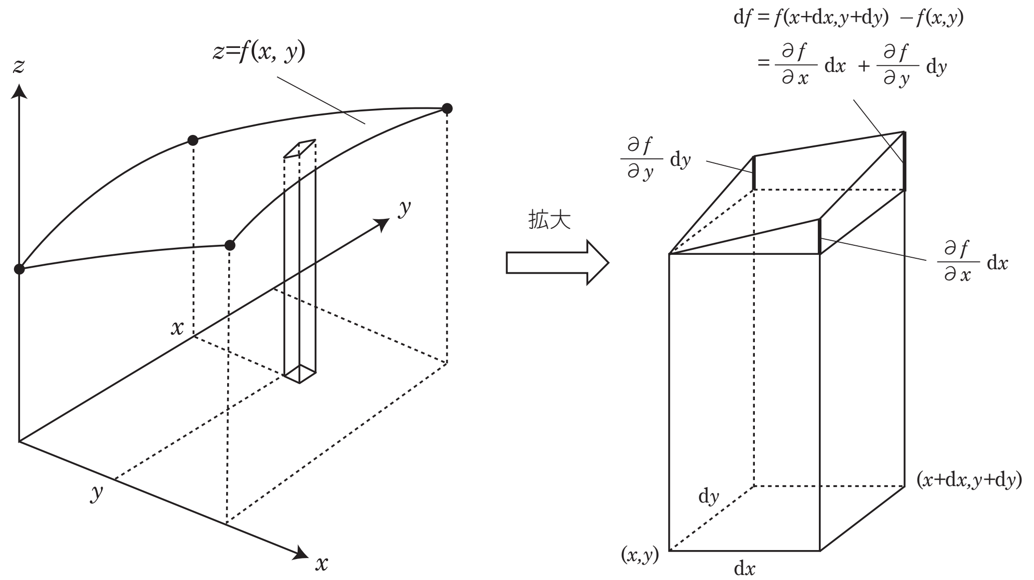

図 1: 全微分公式の証明のための図

全微分公式の具体例

3 変数関数の場合の全微分公式は以下の式で与えられる:

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

感じをつかむために $f(x,y,z) = xy^2z^3$ を考えよう:

$$\begin{aligned}
df &= f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = (x+dx)(y+dy)^2(z+dz)^3 - xy^2z^3 \\
&\simeq (x+dx)(y^2+2ydy)(z^3+3z^2dz) - xy^2z^3 \\
&\simeq xy^2z^3 + dx\cdot y^2z^3 + x\cdot 2ydy\cdot z^3 + xy^2\cdot 3z^2dz - xy^2z^3 \\
&= y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz
\end{aligned}$$

第一の近似等式では $(dy)^2$ や $(dz)^2$ などの高次微小量を無視しており、第二の近似等式では $dxdy$ などの高次微小量を無視している。最後の等式では、$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$ を用いた。

勾配 (gradient, grad) に関する公式

$f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ をスカラー場、α を定数とするとき、以下の公式が成り立つ。(カッコ内はナブラ記号 $\vec{\nabla}$ を用いて同じ公式を書き直したものである。)

$$\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad} f + \mathrm{grad}\, g \qquad (\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g) \tag{1}$$

$$\mathrm{grad}(\alpha f) = \alpha\ \mathrm{grad} f \qquad (\vec{\nabla}(\alpha f) = \alpha \vec{\nabla} f) \tag{2}$$

証明は簡単である。例えば、両辺の x 成分に注目すると、

$$\begin{aligned} (1) \text{ の左辺の } x \text{ 成分} &= \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y,z)+g(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (1) \text{ の右辺の } x \text{ 成分}, \\ (2) \text{ の左辺の } x \text{ 成分} &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha f(x,y,z)) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} = (2) \text{ の右辺の } x \text{ 成分}, \end{aligned}$$

ベクトルの外積について

ベクトルの外積は 1 年の冬学期にもなれば常識なのだが、念のために最低限の知識をまとめる。

$$(\text{定義})\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ のとき、} \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

このベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は以下の様なベクトルである。

- $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き: $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に直交し、向きは右ねじで決める (図 1)。
- $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさ: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = (\vec{a}, \vec{b}$で張られる平行四辺形の面積).

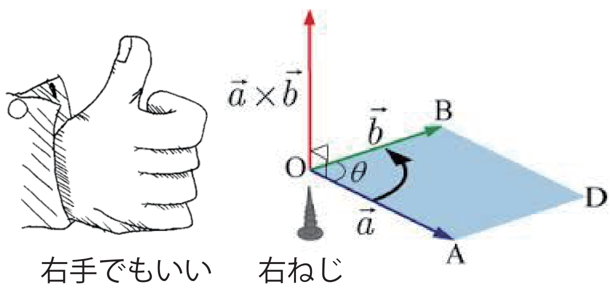

図 2: ベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の向き

証明：(向き) 実際に成分表示を使って $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ を示せばいい。(大きさ) 下記のような変形による。

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) \end{aligned}$$

その他の性質としては、下記のようなものがある。

- 分配法則: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 定数倍: $\vec{a} \times (k\vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = k\vec{a} \times \vec{b}$ (k は定数)
- 交換則: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

これらの式は、成分表示による計算によって簡単に確かめることができる。まとめると、ベクトルの外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ はあたかも掛け算のように取り扱っていいが、掛ける順番をひっくり返すときに負号をつけないといけない点だけに注意する。