修士論文
強磁性微粒子における磁気共鳴と磁気回転効果の理論的研究
(Theoretical study of magnetic resonance and gyromagnetic effect in a ferromagnetic particle)

佐藤哲也

2023 年 2 月 6 日

概要

本論文では、光浮遊技術によって浮遊させた強磁性微粒子に対して、強磁性共鳴による磁気励起と磁気回転効果によって生じるマクロな回転運動を考察する。

まず、微粒子の定常回転速度をランダウ-リフシッツ-ギルバート方程式とオイラー方程式から古典的に求めた。その結果、照射するマイクロ波周波数が共鳴周波数に近いとき、微粒子が非常に高速に回転することを明らかにした。また、周囲の気体の圧力やマイクロ波の振幅などが特定の条件を満たすと、回転速度のグラフに分岐が生じることがわかった。さらに、磁気回転結合の係数の変化によって回転速度のマイクロ波周波数のグラフが敏感に変化することがわかった。これにより、固体中の磁気回転結合の強度に関する情報が得られることを理論的に示した。

続いて、微粒子の回転速度ゆらぎ (ノイズ) を理論的に考察した。磁化の運動を非平衡開放量子系の理論を用いて記述し、回転運動に対してはランジュバン方程式を用いることで、微粒子に働くトルクのゆらぎを記述し、回転速度ノイズパワーを求めた。その結果、上で述べた分岐付近で回転速度ノイズが増大することがわかり、回転速度ノイズを測定する際には分岐付近に着目することが重要であることがわかった。また、静磁場が十分大きい (または温度が十分低い) ときに、ショットノイズ的な角運動量移行に伴う回転速度ノイズが観測可能であることがわかった。この非平衡ショットノイズによる回転速度のゆらぎと回転速度の平均値の比からは、磁化が格子に渡す角運動量の単位が求められることもわかった。

本研究の結果は、我々の提案するセットアップによって、磁化と微粒子回転の間の磁気回転結合に関する様々な情報を得ることができることを示しており、光浮遊技術とスピントロニクス分野を結ぶ新しい学際分野を切り開く研究となることが期待される。

目次

概要 i

第 1 章　序論 1
1.1　研究の背景 1
1.2　強磁性共鳴 1
1.3　光による浮遊技術 2
1.4　磁気回転効果 4
1.5　セットアップと本論文の目的 6
1.6　本論文の構成 7

第 2 章　浮上した強磁性微粒子の定常回転 8
2.1　強磁性共鳴の古典的な定式化 8
2.2　微粒子の回転運動の定式化 10
2.3　実験パラメータ 12
2.4　$g_{\mathrm{SR}} = 1$ の場合 13
2.4.1　定常状態の角速度 13
2.4.2　分岐の出現条件と転移圧力 16
2.5　$g_{\mathrm{SR}} \neq 1$ の場合 18
2.6　本章のまとめ 18

第 3 章　浮上した強磁性微粒子の回転速度ノイズ 20
3.1　概要 20
3.2　GKSL 方程式 21
3.3　フォッカー-プランク方程式 23
3.4　フォッカー-プランク方程式と LLG 方程式の対応関係 26
3.5　確率マスター方程式 26
3.6　ギルバート減衰によって生じるトルクの時間相関の計算 29
3.7　回転速度ノイズの計算 31
3.8　回転速度ノイズの見積もり 33
3.8.1　実験パラメータ 34

3.8.2 回転速度ノイズ 34
3.8.3 回転速度ノイズの起源 35
3.8.4 ショットノイズ 35
3.9 本章のまとめ 37

第 4 章 まとめ 38

付録 A 分子流領域での空気抵抗トルク 39

付録 B 磁気回転結合の g 因子の変調 41

付録 C ギルバート減衰定数に対する依存性 43

付録 D 定常解の決定 46

謝辞 48

参考文献 49

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

近年、次世代の高速・省エネルギー電子技術として、スピントロニクスと呼ばれる分野が注目を集めている [1–5]。電子の電荷を利用した応用技術はエレクトロニクスと呼ばれ古くから利用されてきたのに対し、スピントロニクスは電子のもう一つの自由度である「スピン」に着目する。スピンの流れ (スピン流) を利用することにより、スピントロニクスデバイスではジュール熱の抑制や高速駆動が可能になると期待されており、現在活発な研究が行われている。特にこの十数年で、スピンゼーベック効果やスピンポンピングをはじめとした新しい現象を利用して、スピン流の生成・制御が行われるようになっており、現在も多くの実験研究・理論研究が行われている。

将来の展開が期待されているスピントロニクス技術の一つとして、角運動量のやり取りを通じてスピンと力学的運動を結びつける研究分野 (スピンメカトロニクス) を挙げることができる [5,6]。スピンと力学的な運動の相互変換を用いると、スピンを制御することで物体にトルクを生じさせたり、逆に固体の回転運動からスピン流を生成させることができるようになると期待される。

本論文では、このスピンメカトロニクスと呼ばれる分野に関して行なった研究をまとめる。本章では、本研究と関連の深い技術として、強磁性共鳴を紹介した後、光によって浮上させた微粒子におけるスピンと力学回転の変換現象について紹介する。さらにスピンと力学的運動の間の相互変換の有力な方法として、磁気回転効果を紹介する。最後に本研究で考察する実験系のセットアップを説明し、本論文の研究目的をまとめる。

1.2 強磁性共鳴

磁場下の強磁性体に外部からマイクロ波を照射させると、強磁性体の磁化 (スピン) の歳差運動を引き起こすことが可能である。特に磁化の歳差周波数と一致したマイクロ波に対して、強磁性体中の磁化は共鳴的に応答し、大きな磁化の歳差運動を生じさせることができる。この現象を**強磁性共鳴**という。

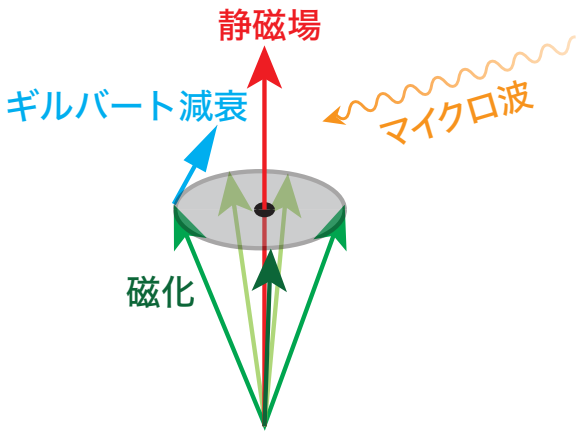

図 1.1　強磁性共鳴の概念図

以下では、図 1.1 のように強磁性体に静磁場をかけながら、面内に振動磁場を印加する状況を考える。このとき、静磁場の方向を軸として磁化が歳差運動を始める。振動磁場の周波数が、静磁場の大きさに比例する共鳴周波数（典型的にはマイクロ波領域）に近づいたとき、磁化が磁場の方向から大きく倒れ、磁化の面内成分が増大する。

磁化の運動は以下のランダウ-リフシッツ-ギルバート方程式（LLG 方程式）で記述される:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = \boldsymbol{M} \times \gamma \boldsymbol{B} + \frac{\alpha}{M} \boldsymbol{M} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}. \tag{1.1}$$

ここで、$\boldsymbol{M}$ は磁化、$M = |\boldsymbol{M}|$ は磁化の大きさ、γ は磁気回転比（電子の場合、負の値をとる）、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、α はギルバート減衰定数である。この LLG 方程式は、通常のゼーマン型のハミルトニアンから導かれる運動方程式に対して、現象論的にギルバート減衰を記述する項 (式 (1.1) の右辺第 2 項) を加えて導出される。ギルバート減衰項は、磁化を静磁場方向に向けるような緩和を記述している (図 1.1 の青矢印)。

強磁性共鳴において、磁化は振動磁場（マイクロ波）から角運動量を受け取り、ギルバート減衰を通じて角運動量を放出する。これを利用すると、例えば強磁性体と常磁性体の接合系において、強磁性体から常磁性体へとスピン角運動量の流れ (スピン流) を生成することが可能となる [8]。これが**スピンポンピング**である。図 1.2 のように逆スピンホール効果 [7] と組み合わせることで、実際に常磁性体に注入されたスピン流の大きさを評価することも可能である。強磁性共鳴を用いたスピンポンピングは様々な形で応用されており、スピントロニクス分野における重要な実験手法として確立している。

1.3　光による浮遊技術

光浮遊技術の先駆的な研究として、1970 年代にアシュキンによって光ピンセットと呼ばれる技術が実現された [10]。光ピンセットは、レーザー光を集光することで、ナノ・

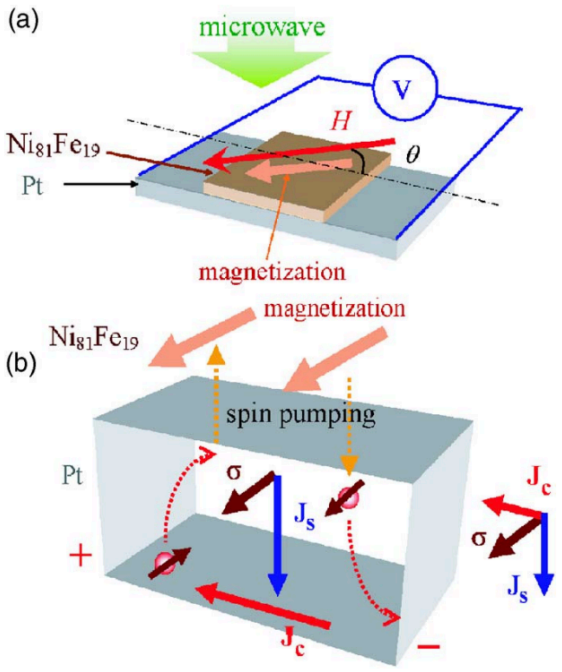

図 1.2　(a) 強磁性体（Ni_81Fe_19）にマイクロ波を当てて強磁性共鳴を起こすと、(b) スピンポンピングで常磁性金属（Pt）にスピン流 J_s が注入され、逆スピンホール効果を通じて、電流 J_c に変換される。文献 [7] より引用。

図 1.3　光ピンセットの概略図。文献 [9] より引用。

マイクロ粒子を三次元的に捕捉できる技術である。光ピンセットの概略を図 1.3 に示す。レーザー光を集光し、焦点付近に大きな電場勾配を生成すると、トラップしたい微粒子とその周りの媒質の屈折率の違いから、微粒子を捕捉するような力が働く。例えば、図 1.3 (a) のように、微粒子が焦点の位置より左に動くと、右から左へと屈折するレーザー光が、その逆のレーザー光よりも多くなり、レーザー光は右から左へ向かう運動量を受け取ることになる。このとき作用反作用の法則より、微粒子は左から右へと向かう力を受け取り、微粒子は元の焦点の位置に戻ろうとする。また図 1.3 (b) のように、微粒子が下に下がった場合には、より多くのレーザー光が下向きに屈折される。微粒子は、その反作用として上向きの力を受け取り、再び焦点付近に戻ろうとすることになる。

このような機構によって、微粒子を焦点付近にトラップすることができるだけでなく、焦点を移動させることで微粒子自体を動かすことも可能である。さらには微粒子の位置を観測することで、その微粒子に働いている力を精密に測定することもできる [9, 11]。これ

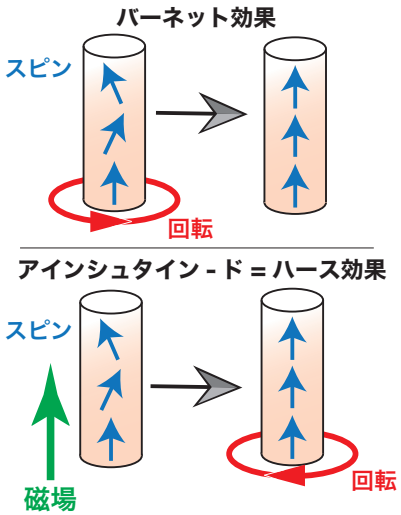

図 1.4　磁気回転効果の概略図

らのメリットを生かして幅広く光ピンセットは利用されてきた。特に生物物理学への応用が飛躍的に進展し、2018 年にアシュキンはノーベル物理学賞を受賞することとなった。その後も研究が進み、現在では上述した光ピンセット以外の様々な光浮遊技術が開発されてきている。

1.4　磁気回転効果

本研究では、光浮遊技術によって空中に固定した強磁性微粒子におけるスピン・回転運動の変換現象に着目する。その際に、微粒子のマクロな回転の角運動量とスピン角運動量の変換機構として鍵となるのが磁気回転効果である。

磁気回転効果とは、スピンとマクロな回転の間の相互変換を表す効果 (バーネット効果、および、その逆効果であるアインシュタイン-ド=ハース (EdH) 効果) を指す。1915 年、バーネット [12] は、試料のマクロな回転が有効磁場として働き、試料が磁化することを示した (図 1.4 の上図)。また同年にアインシュタインとド=ハース [13] は、磁場をかけて試料が磁化すると、試料がマクロに回転し始めるということを示した (図 1.4 の下図)。これらの磁気回転効果は、スピン角運動量とマクロな回転の角運動量の合計が一定であること (角運動量保存則) からよく理解できる。つまり、バーネット効果はマクロな回転による角運動量がスピン角運動量へと変換する現象、EdH 効果はスピン角運動量がマクロな回転による角運動量へと変換する現象、とそれぞれ理解することができる。

磁性体に対する磁気回転効果の研究は長年に渡って行われてきたが、近年は非磁性体も含め幅広く盛んに研究されるようになっている。バーネット効果を利用した研究としては、フェリ磁性体の磁化補償温度の決定 [14, 15] や、流体回転や表面弾性波などによるスピン流の生成 [16–21] などが挙げられる。また EdH 効果については、電子のスピンフ

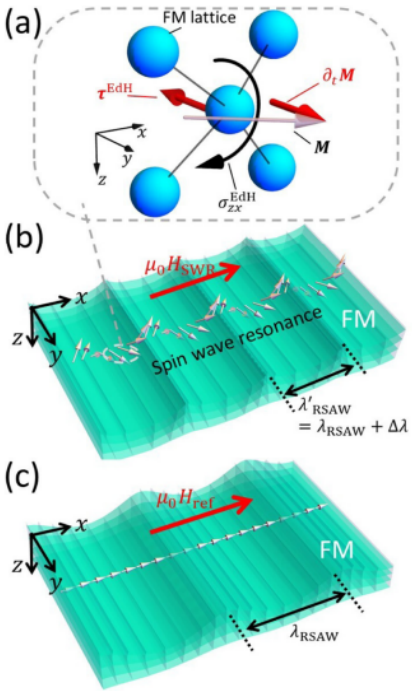

図 1.5　(a) 磁化の時間微分 $\partial_t \boldsymbol{M}$ が EdH 効果を通じてトルク τ^{EdH} を生み出す。(b) レイリー型表面弾性波 (RSAW) がバーネット効果を通じて zz 方向の振動磁場を生み、x 方向の磁場が特定の大きさになりスピン波励起 (SWR) が起こる。このとき $\partial_t \boldsymbol{M}$ が大きく生成され、EdH 効果を通じてトルク τ^{EdH} が生成される。この生じたトルクが、出力される表面弾性波の波長を $\Delta\lambda$ だけシフトさせる。(c) x 方向の静磁場が共鳴条件を満たさず、スピン波が励起されていない状態。文献 [25] より引用。

リップによる微小トルクの観測 [22]、ナノ磁性薄膜の磁気回転比の決定 [23]、強磁性体の磁化緩和プロセスの解明 [24] などの研究が行われてきた。

これまでの磁気回転効果の研究では、バーネット効果と EdH 効果のどちらかに着目して研究が行われてきたが、ごく最近になって、表面弾性波を用いた実験系で 2 つの磁気回転効果が共に重要な役割を果たす物理現象が観測されている [25]。この実験では、表面弾性波によって入力された局所的な回転運動が、バーネット効果を通じてスピンのダイナミクスに影響し、さらにそのスピンのダイナミクスから EdH 効果を通じて追加の局所回転運動が生じる様子が調べられた（図 1.5）。このような 2 つの磁気回転効果の競合は、スピンと力学回転の変換現象を考察する上で重要になる可能性があるが、その研究は端緒がついたばかりであり、まだ十分には調べられていない。また通常の固体系では、固体中の電子励起やフォノン励起を介して、固体に接触している周りの環境に力学回転の角運動量が緩和してしまうため、精密な実験研究を行うことが困難な状況にあった。

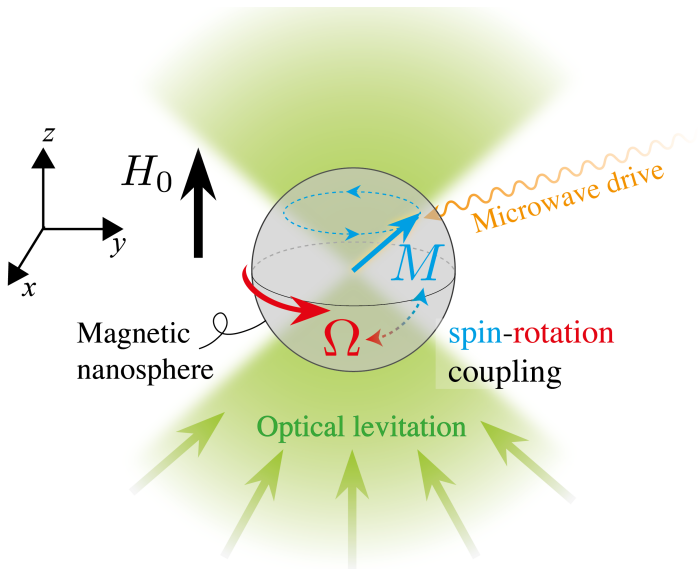

図 1.6　本研究で考察する実験のセットアップ

1.5　セットアップと本論文の目的

本論文では、強磁性共鳴と光浮遊技術を組み合わせて、2 つの磁気回転効果 (バーネット効果と EdH 効果) が共存する新しい物理系を提案する。具体的には図 1.6 のようなセットアップを考える。真空下で光浮遊技術を用いて浮かせた球状の強磁性微粒子に対して、$+z$ 軸方向に静磁場 H_0 を印加し、さらにマイクロ波を xy 面内に印加することで強磁性共鳴を起こす。このとき、磁化の歳差運動に伴って、ギルバート減衰によってスピン角運動量が $+z$ 軸方向へ緩和すると、磁化（スピン）から格子系に角運動量が移行し、最終的に微粒子のマクロな回転が生じることが期待される。前章で述べた光浮遊技術は、強磁性微粒子に対しても応用されており [26]、このセットアップは現在の光浮遊技術で十分に実現可能であると考えられる。

本論文では、このような機構による強磁性体微粒子の回転速度の解析を行う。この系のメリットは大きく三つある。一つ目は、強磁性体微粒子を光によって浮遊させることで、力学回転運動が環境から十分切り離されて孤立系とみなすことができる点である。そのため、ギルバート減衰で緩和したスピン角運動量は電流やスピン流を通じて散逸することはなく、全てが格子の力学回転の角運動量に移行すると考えられる。これは前節で述べた力学回転の緩和などの困難を回避できることを意味し、磁気回転効果を精密に調べることを可能にすると考えられる。二つ目の利点は、光浮遊技術によって、微粒子の面内の回転を抑制し、一軸 (z 軸) 周りのみの回転を生じさせることが可能になる点である [27–29]。これにより磁気回転効果の解析が容易になる。そして三つ目の利点は、浮遊させた強磁性体の回転を妨げる力が空気抵抗のみであり、圧力を制御することにより空気抵抗による角運動量の散逸を抑えることができる点である。この三つの利点のために、次章で述べるよう

な微粒子の高速回転が可能となる。この EdH 効果で生じた高速回転は強いバーネット効果を生み、強磁性共鳴下の磁化の運動にも影響を及ぼす。つまり我々の提案するこのセットアップは、二つの磁気回転効果が競合した系となっている。以上のように、このセットアップは磁気回転効果の競合を精密に調べるのに適したものとなっていると考えられる。

光浮遊技術によって浮かせた微粒子における磁化・力学回転の変換現象とそれによって生じる微粒子の回転運動に関しては、すでにいくつかの研究が行われている。ほとんどの先行研究では、強い磁気異方性をもつ強磁性体を考え、磁化と微粒子の結晶方位のロッキング現象を利用して、磁化と回転運動の変換が考察されている [30–37]。ごく最近になって、磁気異方性を持たない強磁性体においても、磁気回転効果を用いた磁化と回転運動の変換現象が議論され始めている [38]。しかし、これらの研究では、微粒子に加わるトルクの生成・制御に着眼点がおかれており、微粒子の高速回転に伴うバーネット効果および EdH 効果の競合現象については全く考察されていない。また、光浮遊技術によって浮かせた非磁性微粒子の高速回転はすでに実現されており、その回転速度は微粒子の光を照射したときの散乱光の周波数シフトから測定されている [39, 40]。しかしながら、回転機構は磁気回転効果を用いておらず、当然ながらバーネット効果および EdH 効果の競合現象は現れない。

本研究では、浮遊させた強磁性微粒子の高速回転運動における磁気回転効果の理論を構築する。特に強磁性共鳴周波数と回転速度が同じオーダーになり得る点に注目し、高速回転による EdH 効果とバーネット効果の競合現象について考察する。具体的には、EdH 効果を通じたスピン角運動量から物体の回転運動への変換現象を理論的に記述すると同時に、その高速な回転運動がバーネット効果を通じてスピンのダイナミクスにどのようにフィードバックされるかを調べる。このセットアップは、スピンメカトロニクスの分野で鍵となる磁気回転結合定数の決定にも応用できる。我々が提案するこの物理系によって、光浮遊技術をスピントロニクス分野へ応用する新たな測定手法が確立されることを期待している。

1.6　本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では、磁化の運動を LLG 方程式から古典的に定式化し、定常状態での磁化と回転速度の様子を理論的に明らかにする。また、この定常状態での試料の回転速度を観測することで、磁気回転結合の係数が測定できることを示す。第 3 章では、定常状態での回転速度のノイズ (ゆらぎ) の大きさを導出する。LLG 方程式では磁化の非平衡ノイズを記述することができないため、LLG 方程式に量子ゆらぎの効果を取り入れることができる定式化を新たに構築する。磁化の非平衡ノイズと空気抵抗のノイズを取り入れた上で、ランジュバン方程式から回転速度ノイズを求め、その回転速度ノイズから得られる磁化の情報について理論的に考察する。最後に第 4 章で本論文のまとめを行う。

第 2 章

浮上した強磁性微粒子の定常回転

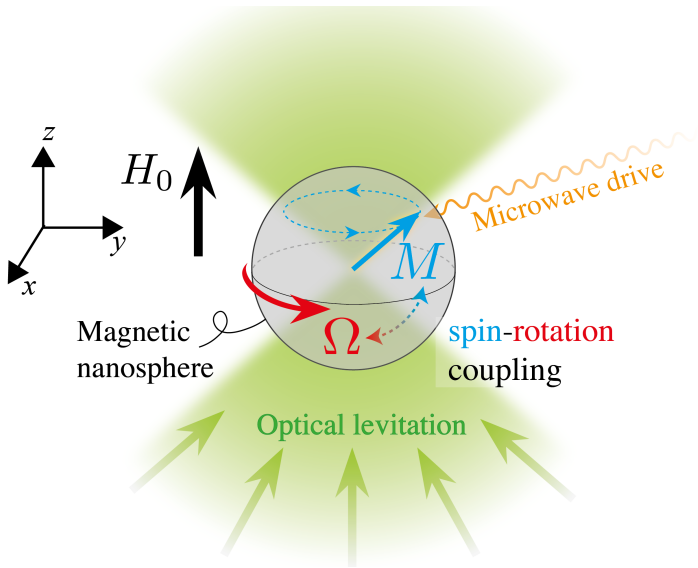

図 2.1　我々が提案するセットアップ (再掲)

本章では、図 2.1 に示すセットアップにおいて、強磁性微粒子の磁化の運動と、微粒子の回転運動を古典的に定式化する。回転運動と磁化の運動は磁気回転効果を通じて相互に影響し合う。それらの効果を考慮に入れて定式化を行い、強磁性共鳴下における微粒子の定常回転の回転速度を計算する。

2.1　強磁性共鳴の古典的な定式化

回転速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する物体に固定された座標系において、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\hbar \boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}} \cdot (\gamma \boldsymbol{B} + g_{\mathrm{SR}} \boldsymbol{\Omega}) \tag{2.1}$$

と書かれる。ここで、$\gamma = -1.76 \times 10^{11}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$ は磁気回転比、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}}$ は系全体のスピンである。ハミルトニアンには、通常のゼーマン項に加えて、試料の回転速

度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を含む項が現れる。この項は**磁気回転結合**（spin-rotation coupling）を記述し、回転する座標系からみると、物体中のスピンは回転速度に比例する有効磁場を感じることを意味する。微粒子の磁化が回転速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の向きを向くときにエネルギーが低くなるので、この項はバーネット効果を表しているともいえる。g_{SR} は磁気回転結合の定数であり、真空中の電子に対しては厳密に 1 となるが、固体中ではスピン軌道相互作用によって 1 からずれることが知られている [41]（付録 B 参照）。本論文では、微粒子は光浮上技術によって常に回転軸が z 軸となるように固定されていると仮定し、回転速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$ とする。

このハミルトニアンから磁化の運動に関するハイゼンベルグ方程式を立て、さらに現象論的なギルバート減衰項を加えると、以下の LLG 方程式が導出される:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = \boldsymbol{M} \times (\gamma \boldsymbol{B} + g_{\mathrm{SR}} \boldsymbol{\Omega}) + \frac{\alpha}{M} \boldsymbol{M} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

ここで、$\boldsymbol{M}$ は磁化、$M = |\boldsymbol{M}|$ は磁化の大きさ、α はギルバート減衰定数である。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は、外部磁場 $\boldsymbol{H}$ に加えて、双極子相互作用に由来する磁性体内の反磁場効果により [42]

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} - \overleftrightarrow{N} \boldsymbol{M}), \tag{2.3}$$

と書かれる。ここで、$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}}$ は真空の透磁率である。$\overleftrightarrow{N}$ は反磁場を表す係数で、試料の形状によって変化する。例えば

$$\begin{cases} \text{球：} & \overleftrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \\ \text{z 方向を向いた無限円筒：} & \overleftrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.4}$$

である。本論文では浮上させた微粒子は球の形状をしていると仮定する。このとき、反磁場の項は $\overleftrightarrow{N} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}/3$ となって $\boldsymbol{M}$ に比例し、LLG 方程式に磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の式を代入したときに反磁場項はゼロになる。外部磁場 $\boldsymbol{H}$ は z 方向に加えられた静磁場に加えて、xy 面内に振幅を持つ円偏光マイクロ波の交流磁場を考え、以下のように記述する:

$$\boldsymbol{H} = (h_x, h_y, H_0) = (h \cos(\omega - \Omega_z) t, h \sin(\omega - \Omega_z) t, H_0). \tag{2.5}$$

ここで h がマイクロ波の振幅であり、$h \ll H_0$ である。LLG 方程式は物体とともに角速度 Ω_z で回転する座標系を用いて書かれているため、円偏光マイクロ波周波数が ω から $\omega - \Omega_z$ にシフトしていることに注意せよ。

本論文では、定常状態 $\dfrac{\partial M_z}{\partial t} = \dfrac{\partial \Omega_z}{\partial t} = 0$ のみを考える。このとき、LLG 方程式 (2.2) の x, y 成分は、

$$\begin{pmatrix} \partial_t & -(\mu_0 \gamma H_0 + g_{\mathrm{SR}} \Omega_z - \frac{\alpha M_z}{M} \partial_t) \\ \mu_0 \gamma H_0 + g_{\mathrm{SR}} \Omega_z - \frac{\alpha M_z}{M} \partial_t & \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \mu_0 \gamma M_z \begin{pmatrix} -h_y \\ h_x \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

となる。定常解として、

$$M_x = m\cos((\omega-\Omega_z)t+\phi), \quad M_y = m\sin((\omega-\Omega_z)t+\phi), \tag{2.7}$$

を仮定し、これを LLG 方程式 (2.6) に代入すると、

$$\tan\phi = \frac{\alpha\frac{M_z}{M}(\omega-\Omega_z)}{\omega+(\mu_0\gamma H_0+(g_{\rm SR}-1)\Omega_z)}, \tag{2.8}$$

$$m = \frac{\mu_0\gamma M_z h}{\sqrt{(\omega+\mu_0\gamma H_0+(g_{\rm SR}-1)\Omega_z)^2+(\alpha(\omega-\Omega_z)M_z/M)^2}}, \tag{2.9}$$

という解を得る。通常の強磁性共鳴の議論では、磁化はほぼ z 方向を向いている ($M_z \sim M$) と仮定してさらに簡潔な表式を得るが、本論文ではそのような仮定を用いず、$M_z^2 = M^2 - m^2$ の関係式が常に厳密に成り立つとする[*1]。さらに $\Delta g = g_{\rm SR} - 1$ とし、$M_z^2 = M^2 - m^2$ に式 (2.8),(2.9) を代入すると、

$$\left(\frac{\alpha(\omega-\Omega_z)}{M}\right)^2 M_z^4 + \left[(\mu_0\gamma h)^2 + (\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2 - (\alpha(\omega-\Omega_z))^2)\right] M_z^2 - (\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2 M^2 = 0, \tag{2.10}$$

が得られる。ここで、$\omega_0 = -\mu_0\gamma H_0$ は共鳴周波数である。これを解くと

$$M_z^2 = \frac{1}{2\alpha^2(\omega-\Omega_z)^2/M^2}\Bigg\{-\mu_0^2\gamma^2h^2 - (\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2 + \alpha^2(\omega-\Omega_z)^2 + \sqrt{\left[\mu_0^2\gamma^2h^2+(\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2-\alpha^2(\omega-\Omega_z)^2\right]^2 + 4\alpha^2(\omega-\Omega_z)^2(\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2}\Bigg\}, \tag{2.11}$$

となる。ここで M_z が実数になるようにルートの前の符号を選んだ。ここまでで LLG 方程式 (2.2) から、磁化の定常解を Ω_z の関数として求めることができた。

2.2　微粒子の回転運動の定式化

次に、微粒子の回転運動について議論する。まず、基礎方程式を立てるために、系のラグランジアンを書き下す。$\boldsymbol{S}^{\rm tot} = S^{\rm tot}(\sin\theta_s\cos\phi_s, \sin\theta\sin\phi_s, \cos\theta_s)$、$\boldsymbol{\Omega} = (0,0,\dot\phi)$ とすると、回転系での磁化のハミルトニアン (2.1) も用いて、系のラグランジアンは、

$$\begin{aligned} L[\phi,\dot\phi,\theta_s,\dot\theta_s,\phi_s,\dot\phi_s] &= \frac{1}{2}I\dot\phi^2 + \hbar S^{\rm tot}\dot\phi_s(\cos\theta_s-1) - \mathcal{H} \\ &= \frac{1}{2}I\dot\phi^2 + \hbar S^{\rm tot}\dot\phi_s(\cos\theta_s-1) + g_{\rm SR}\hbar S^{\rm tot}\cos\theta_s\dot\phi \\ &+ \mu_0\gamma\hbar S^{\rm tot}\left[h_{\rm ac}\sin\theta_s\left(\cos(\omega t-\phi)\cos\phi_s + \sin(\omega t-\phi)\sin\phi_s\right) + H_0\cos\theta_s\right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

[*1] 後で見るように、我々のセットアップでは共鳴付近で M_z が M に比べて小さくなり、条件式 $M_z \sim M$ が成り立たなくなる。

となる。ここで $I = 2m_{\mathrm{ptc}}r^2/5$ は試料の慣性モーメント、m_{ptc} は微粒子の質量、r は微粒子の半径であり、ラグランジアンの第一項は試料の回転運動エネルギーである[*2]。また、$\phi(t=0)=0$ となるように初期条件を決めてある。ラグランジアンの第二項はベリー位相項である [3]。式 (2.12) を用いて、微粒子の回転角 ϕ についてオイラー-ラグランジュ方程式を立てると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I\dot{\phi} + g_{\mathrm{SR}}\hbar S_z^{\mathrm{tot}}\right] = \mu_0\gamma\hbar\left[\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}\right]_z, \tag{2.13}$$

となる。これは磁化と回転運動を含めた系全体の z 方向の角運動量保存則を示しており、右辺はマイクロ波によって系が角運動量を受け取ることを表している。式 (2.13) は摩擦がない場合の式であるが、実際には空気抵抗が存在するため、右辺に角運動量の減衰項 $-\beta\Omega_z$ を付け加える必要がある。ここで β は微粒子が周りの気体から受ける空気抵抗の係数である。磁化とスピンの関係 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}} = \frac{V}{\hbar\gamma}\boldsymbol{M}$ も用いると、定常状態 $\dot{\Omega}_z = \dot{M}_z = 0$ に対する方程式は、

$$f(\Omega_z) \equiv \mu_0 V\left[\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}\right]_z - \beta\Omega_z = 0, \tag{2.14}$$

となる。ここで後の議論のために、微粒子が受ける全トルクを $f(\Omega_z)$ とおいた。この式の第 1 項は、式 (2.7) を用いて、

$$\mu_0 V\left[\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}\right]_z = -\frac{V}{\gamma}\frac{\alpha}{M}(\omega-\Omega_z)m^2, \tag{2.15}$$

と変形できる。よって、Ω_z の定常解は、

$$f(\Omega_z) = -\frac{V}{\gamma}\frac{\alpha}{M}(\omega-\Omega_z)m^2 - \beta\Omega_z = 0, \tag{2.16}$$

から求められることになる。$m^2 = M^2 - M_z^2$ と式 (2.10) を用いて書き直すと、この Ω_z の方程式 (2.16) は

$$\begin{aligned}&\frac{V}{\gamma}\left[\mu_0^2\gamma^2h^2 + (\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2 + \alpha^2(\omega-\Omega_z)^2\right] + 2\beta\frac{\alpha}{M}(\omega-\Omega_z)\Omega_z \\ &= \frac{V}{\gamma}\sqrt{(\mu_0^2\gamma^2h^2 + (\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2 - \alpha^2(\omega-\Omega_z)^2)^2 + 4\alpha^2(\omega-\Omega_z)^2(\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2},\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。$\gamma < 0$ に注意すると、ルートの前の符号から、

$$\frac{V}{\gamma}\left[\mu_0^2\gamma^2h^2 + (\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2 + \alpha^2(\omega-\Omega_z)^2\right] + 2\beta\frac{\alpha}{M}(\omega-\Omega_z)\Omega_z < 0, \tag{2.18}$$

[*2] ここでは球を考えているので、$I_x = I_y = I_z \equiv I$ である。

の条件を満たしている必要がある。この条件下で式 (2.17) の両辺を 2 乗して計算をすすめると、

$$
\begin{aligned}
&(2\beta\alpha/M)^2(\omega-\Omega_z)^2\Omega_z^2+4\frac{V^2}{\gamma^2}\mu_0^2\gamma^2h^2\alpha^2(\omega-\Omega_z)^2\\
&+2(2\beta\alpha/M)(\omega-\Omega_z)\Omega_z\frac{V}{\gamma}(\mu_0^2\gamma^2h^2+(\omega-\omega_0+\Delta g\Omega_z)^2+\alpha^2(\omega-\Omega_z)^2)=0,
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

となる。$\omega=\Omega_z$ は解にならない[*3]ので、$\omega-\Omega_z$ で割り算してよく、結局解くべき方程式は、不等式 (2.18) のもとで、

$$
\begin{aligned}
&\left[-(2\beta\alpha/M)^2+2(16\pi\mu r^3\alpha/M)\frac{V}{\gamma}(\Delta g^2+\alpha^2)\right]\Omega_z^3\\
&+\left[(2\beta\alpha/M)^2\omega+2(2\beta\alpha/M)\frac{V}{\gamma}2(\Delta g(\omega-\omega_0)-\alpha^2\omega)\right]\Omega_z^2\\
&+\left[2(2\beta\alpha/M)\frac{V}{\gamma}(\mu_0^2\gamma^2h^2+(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2\omega^2)-4\frac{V^2}{\gamma^2}\mu_0^2\gamma^2h^2\alpha^2\right]\Omega_z\\
&+4\frac{V^2}{\gamma^2}\mu_0^2\gamma^2h^2\alpha^2\omega=0,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

という三次方程式になる。ちなみに不等式 (2.18) を満たさない解は M_z が虚数になる。

定常解の様子を見るために、図 2.2 に微粒子の受けるトルク $f(\Omega_z)$ の Ω_z 依存性を模式的に示す[*4]。$f(\Omega_z)=0$ の解 Ω_z が定常状態における微粒子の角速度を与える。この図 2.2 の青丸で示された定常解では、擾乱によって Ω_z が解の値からわずかにずれたときに、正のフィードバックを受けて、より定常解から遠ざかろうとする[*5]。そのため、不安定な解となっている。一方、他の二つの赤丸で示された定常解は、擾乱に対して安定な解になっている。

2.3　実験パラメータ

次節以降で、定常状態での回転速度を具体的に評価する。評価にあたって、YIG での強磁性共鳴によるスピンポンピングの実験 [43] を参考にして、以下の値を用いる:

$$M=1.557\times10^5\,\mathrm{A/m}, \tag{2.21}$$

$$\alpha=6.7\times10^{-5}, \tag{2.22}$$

$$H_0=2.6\times10^5\,\mathrm{A/m},\qquad(\mu_0H_0\simeq0.33\,\mathrm{T}). \tag{2.23}$$

[*3] $\omega=\Omega_z$ のとき、マイクロ波は静磁場になるので、定常的なギルバート減衰は起こらない。

[*4] $f(\Omega_z)=0$ の解の個数は 1 つの場合も 2 つの場合もあるが、この図では例として定常解が 3 つ現れているような状況をプロットした。

[*5] 青い点から少し回転速度 Ω_z を上げると、正のトルク $f(\Omega_z)>0$ が働き、さらに回転速度を大きくしようとする。逆に回転速度を少し下げると、今度は負のトルク $f(\Omega_z)<0$ が働き回転速度をさらに下げようとする。

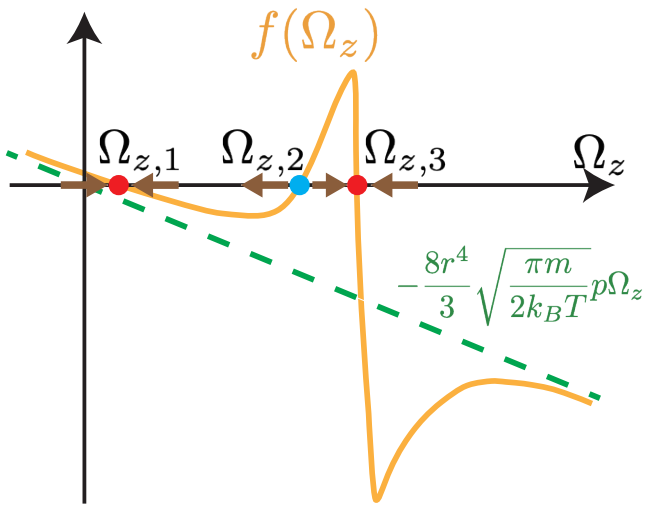

図 2.2　微粒子に働くトータルのトルクを回転速度 Ω_z の関数としてプロットした図。

また、微粒子の半径は $r = 1\,\mu\mathrm{m}$ とする。微粒子が受ける空気抵抗の係数 β は、一般に圧力に依存しており、空気の平均自由行程より微粒子の半径が小さい領域 (分子流領域) では、

$$\beta = \frac{8r^4 p}{3}\sqrt{\frac{\pi m_{\mathrm{air}}}{2k_{\mathrm{B}}T}}, \tag{2.24}$$

と書ける (詳細は付録 A を参照)。圧力 p はパラメータとし、微粒子は空気中に浮上しているとして、

$$m_{\mathrm{air}} = \frac{28.8 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}}\,\mathrm{kg}, \tag{2.25}$$

$$T = 273\,\mathrm{K}, \tag{2.26}$$

とする。これらの値を用いると、$p \lesssim 100\,\mathrm{Pa}$ で平均自由行程が微粒子の半径より十分長くなり、分子流領域における β の表式 (2.24) が正当化される。

2.4　$g_{\mathrm{SR}} = 1$ の場合

まず、$g_{\mathrm{SR}} = 1$ の場合を考える。定常状態における微粒子の回転速度を具体的に評価した後、バーネット効果と EdH 効果の競合で生じる分岐現象について考察する。

2.4.1　定常状態の角速度

マイクロ波周波数 ω を横軸に、回転速度 Ω_z の定常解を縦軸にとってプロットした結果を、図 2.3 (a)〜(d) および (g)〜(j) に示す。マイクロ波の振幅は図 2.3 の (a)〜(d) では $h = 4\,\mathrm{A/m}$、(g)〜(j) では $h = 12\,\mathrm{A/m}$ としており、各図は圧力 p を様々に変えたときの

様子を表す。赤い実線は安定な定常解を、青い実線は不安定な定常解を、それぞれ表している。どの圧力においても、マイクロ波周波数が共鳴周波数に近くなったときに、微粒子の回転速度が大きくなることがわかる。以下で、得られた結果の特徴について詳しく議論する。

振幅 $h = 4\,\mathrm{A/m}$ のとき、低圧では図 2.3 (d) に示すように任意のマイクロ波周波数に対して安定解が一つだけ存在する。少し圧力を上げると (c) のようにグラフがくびれて、不安定解 (青い実線) が出現し、特定の圧力 (p_1) において (b) のように上の分枝と下の分枝が接触する。さらに圧力を下げると、(a) のように上の分枝が下の分岐から分離する。図には表していないが、さらに圧力を下げた場合、この上側の分枝が消滅し、安定解は一つだけになり遅い分枝 (グラフの下側の安定解) のみが実現する。

一方、マイクロ波振幅が $h = 12\,\mathrm{A/m}$ になると、図 2.3 (g)〜(j) に示すようにどの圧力に対しても安定な定常解が一つだけ存在し、分岐現象は現れない。

分岐の振る舞いの違いをより詳しくみるために、マイクロ波周波数 ω を共鳴周波数 ω_0 に固定し、横軸を圧力 p、縦軸を角速度 Ω_z としてプロットしたグラフを図 2.3 (f) および (l) にそれぞれ示す。緑の領域は式 (2.18) を満たさない物理的に実現不可能な領域である。そのため緑の領域の内側の解（赤い点線）は考えなくてよく、緑の領域の外側にある解のみに注目すればよい。$h = 4\,\mathrm{A/m}$ のとき、図 2.3 (f) に示すように圧力が高いときには回転速度が遅い分岐のみが実現する。圧力を下げていくと $\Omega_z \simeq 4.5 \times 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ 付近に安定解と不安定解の組が出現する。さらに圧力を下げると、ある圧力 $p = p_1$ でさきほどの回転速度が遅い分岐と不安定解が消失し、回転速度が速い分岐のみが残る。これらの挙動は、図 2.3 の (a) から (d) のグラフ中の共鳴点 ($\omega = \omega_0$) での解の振る舞いの変化に対応する。図 2.3 の (b) は $p = p_1$ の場合に対応するが、このとき磁化 M_z を ω の関数として描くと図 2.3 (e) のようになり、回転速度が遅い (速い) 分岐では磁化の z 成分が大きく (小さく) なることがわかる。一方で $h = 12\,\mathrm{A/m}$ のとき、図 2.3 (l) に示すように任意の圧力に対して分枝は一つのみ実現する。この場合、ある圧力 $p = p_2$ において分枝が切り替わりが生じていることがわかる。このときには (h) のように、共鳴周波数において回転速度のグラフが尖った形になる。また $p = p_2$ のとき、M_z を ω の関数として描くと図 2.3 (h) のようになり、回転速度が速くなると磁化の z 成分が小さくなり、面内成分の歳差運動の振幅が大きくなっていることがわかる。

以上の非線形現象は、微粒子の回転速度 Ω_z の決定方程式が 3 次方程式になっていることによる。特にマイクロ波周波数 ω と回転速度 Ω_z が同程度になると、ギルバート減衰項に由来する非線形性が顕著となり、$h = 4\,\mathrm{A/m}$ のときに見られたような分岐現象が現れる。ここで得られた分岐現象を始めとする非線形応答は、微粒子が高速回転する状況でのみ生じることに注意が必要である。

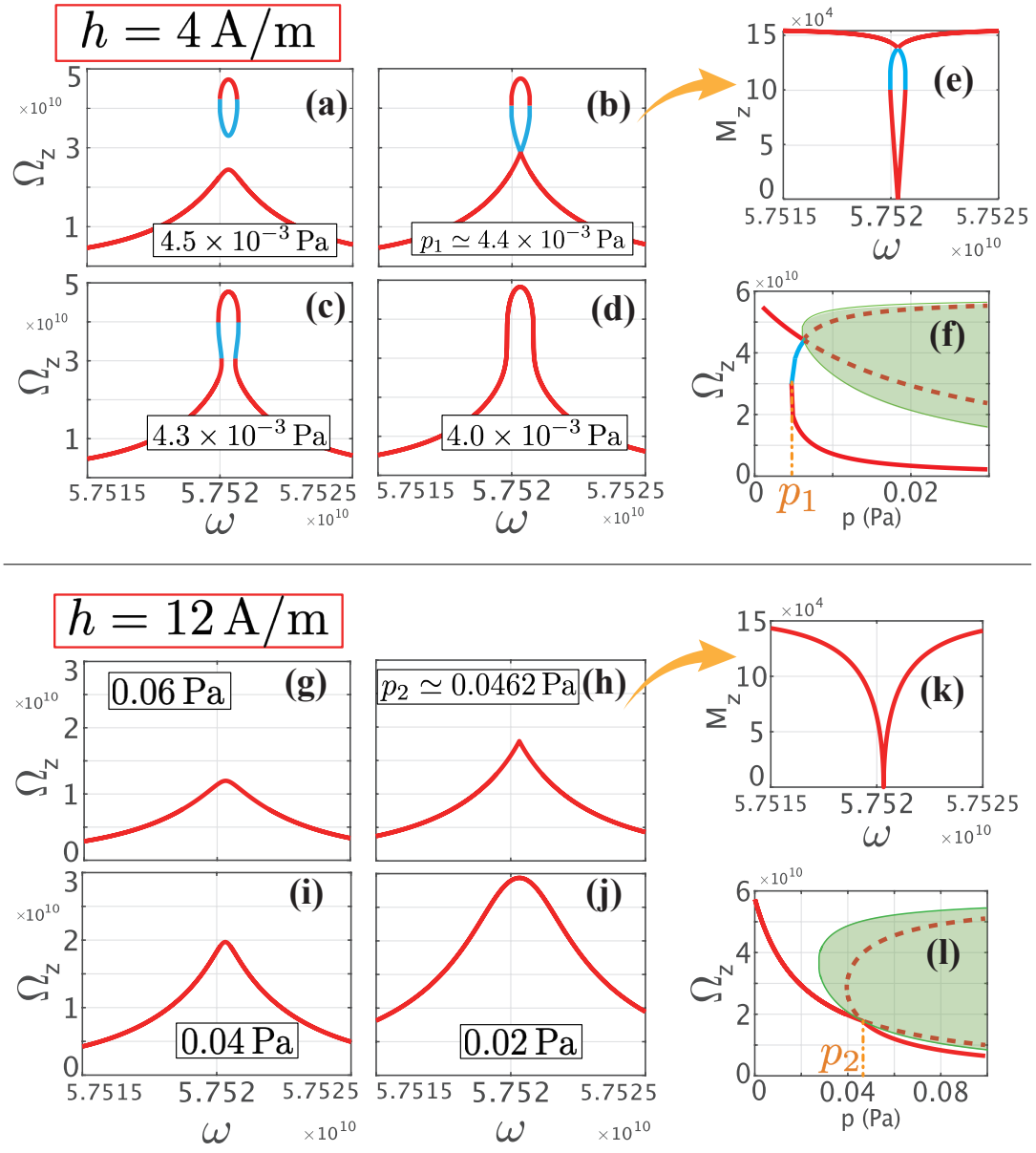

図 2.3　マイクロ波振幅が（上）$h = 4\,\mathrm{A/m}$ のとき（下）$h = 12\,\mathrm{A/m}$ のときの様子。(a)∼(d), (g)∼(j) はそれぞれの圧力に対しての回転速度 Ω_z をマイクロ波周波数 ω の関数でプロットしたもの。(e)(k) はそれぞれ (b)(h) に対応して、磁化の z 成分 M_z をマイクロ波周波数 ω の関数としてプロットしたもの。(f)(l) は回転速度 Ω_z を今度はマイクロ波周波数を共鳴周波数に固定した上で（$\omega = \omega_0 \simeq 5.752 \times 10^{10}$ Hz)、圧力 p の関数としてプロットしたもの。緑の領域は磁化が複素数になる領域 (物理的に禁止される領域)。

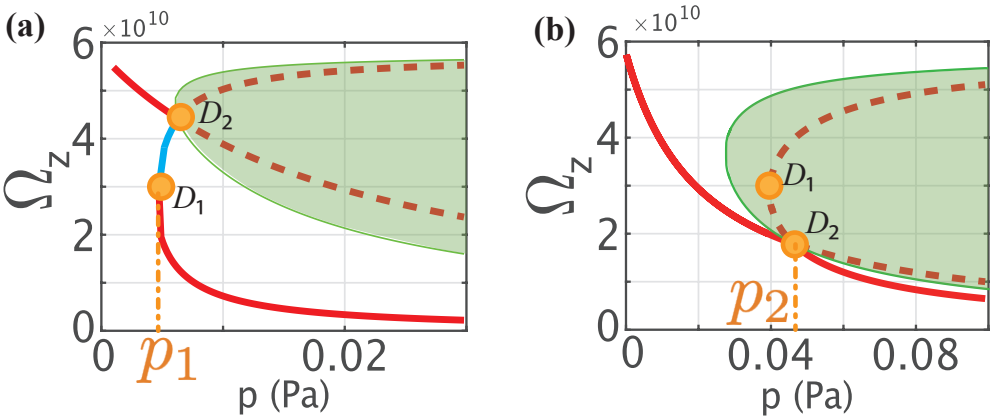

図 2.4　図 2.3(f)(l) の再掲。回転速度の定常解を、マイクロ波周波数を共鳴周波数に固定し、圧力の関数としてプロットした様子。

2.4.2　分岐の出現条件と転移圧力

前節で h が小さいときに、回転速度のグラフに分岐現象が現れることを明らかにした。この節では、この分岐の出現条件について詳細に解析する。以下では簡単のため、$g_{\mathrm{SR}} = 1$ かつ $\omega = \omega_0$ の場合を考え、圧力 p に関する条件を評価する。

定常解の決定方程式 (2.20) は、

$$x = \frac{2\beta\alpha}{M}, \quad y = \frac{V}{\gamma}\alpha^2, \quad z = \frac{V}{\gamma}\frac{\mu_0^2\gamma^2h^2}{\omega_0^2}, \tag{2.27}$$

を用いて、

$$\Omega_z^3(x-2y)x - \Omega_z^2(x-4y)x\omega_0 + \Omega_z(4yz-2xz-2xy)\omega_0^2 - 4yz\omega_0^3 = 0, \tag{2.28}$$

と書き換えられる（$y, z < 0$ に注意）。一方、M_z が実数となるための条件式 (2.18) は、$\omega = \omega_0$ のときに

$$h(\Omega_z) = (x-y)\Omega_z^2 + (-x+2y)\omega_0\Omega_z - (y+z)\omega_0^2 > 0, \tag{2.29}$$

となる。式 (2.28) の解の様子は、圧力 p の関数として図 2.4 のようになる（図 2.3 (f), (l) を再掲した）。図中の D_1, D_2 は三次方程式が重解を持つ点として定義される。3 次方程式 (2.20) の判別式は

$$D = 4\omega_0^4x(x+8z)(x^2y - x^2z + 4xyz - 4y^2z)^2, \tag{2.30}$$

となるので、三次方程式が重解を持つ条件は、

$$D = 0, \quad \rightarrow \quad x = -8z, \frac{-2yz - 2\sqrt{y^3z}}{y-z}, \tag{2.31}$$

となる。前者の解が D_1 に、後者の解が D_2 に、それぞれ対応する[*6]。それぞれの条件下で三次方程式を解くことで、

$$\Omega_z(D_1) = \frac{1}{2}\omega_0, \qquad \Omega_z(D_2) = \frac{y-z}{y-\sqrt{yz}}\omega_0, \tag{2.32}$$

が得られる。

図 2.4 の緑の領域の境界線は、式 (2.29) において $h(\Omega_z) = 0$ とすることで得られる。$h(\Omega_z) = 0$ の条件を満たし、かつ、三次方程式 (2.28) の解となる Ω_z は、連立方程式

$$\begin{cases} h(\Omega_z) = (x-y)\Omega_z^2 + (-x+2y)\omega_0\Omega_z - (y+z)\omega_0^2 = 0, \\ y\Omega_z^2 - 2y\omega_0\Omega_z + (y-z)\omega_0^2 = 0, \end{cases} \tag{2.33}$$

から求められる。これを解くと、$x > 0$（$p > 0$）の解は

$$(x, \Omega_z) = \left(\frac{-2yz - 2\sqrt{y^3 z}}{y-z}, \frac{xy + 2yz - xz}{xy}\omega_0\right), \tag{2.34}$$

となる。式 (2.32) で得られた解との比較により、ここで得られた解は D_2 と一致していることがわかる。これは緑の領域の境界線上にある解は常に D_2 の重解に対応することを意味する[*7]。

以上の考察より、図 2.4 (a), (b) のどちらが実現するかを判定するには、D_1 と D_2 の位置関係に着目すればよい。もし $\Omega_z(D_1) < \Omega_z(D_2)$ であれば、図 2.4 (a) のように D_1 は緑の領域の外側に位置することになり、$p_1 = p(D_1)$ で分岐が生じることになる。一方、$\Omega_z(D_1) > \Omega_z(D_2)$ であれば、図 2.4 (b) のように D_1 は緑の領域内に位置することになり分岐が生じず、安定解は常に一つになる。これより、

$$\begin{cases} \dfrac{y-z}{y-\sqrt{yz}} - \dfrac{1}{2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{3 つの実数解が存在可能 (分岐が生じる)}, \\ \dfrac{y-z}{y-\sqrt{yz}} - \dfrac{1}{2} < 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{常に実数解は一つ (分岐が生じない)}, \end{cases} \tag{2.35}$$

となる。$y = \frac{V}{\gamma}\alpha^2$, $z = \frac{V}{\gamma}\mu_0^2\gamma^2 h^2 \frac{1}{\omega_0^2}$ を用いて書き直すと、$\gamma < 0$ にも注意して

$$\frac{y-z}{y-\sqrt{yz}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\frac{h}{H_0}\right), \tag{2.36}$$

となる。よって、分岐が出現する条件は

$$\frac{h}{H_0} < \frac{\alpha}{2} \tag{2.37}$$

[*6] D_2 のもう一つの解 $x = \frac{-2yz+2\sqrt{y^3z}}{y-z}$ は負になる（つまり圧力が負になる）ので無視する。また、$\frac{-2yz-2\sqrt{y^3z}}{y-z}$ の方も $|y| > |z|$ のときのみ正になる。D_2 が負だと、図 2.4(a)(b) のような分枝の切り替わりが起きず、ただ単純に一つの分枝のみが実現する。

[*7] 図 2.4 を見ればわかるように、交点 D_2 から伸びる四つの線のうち、二つは緑の領域内に入り、物理的な解にはならない。$h(\Omega_z) = 0$（緑の境界）と三次方程式の解が交わるのは D_2 のみなので、マイクロ波振幅 h などのパラメータが連続的に変わっていっても緑の領域内にあった二本の点線が緑の領域を飛び出すことはない。つまりどのようなパラメータに対してもその二つの点線は条件を満たさず、残りの二本が物理的な解になる。

となる。つまり、ギルバート減衰定数 α が大きくなる、もしくは、マイクロ波振幅 h が小さくなると分岐が出現する。

分岐が出現する場合、分枝が生じる圧力は $p_1 = p(D_1)$ で与えられる。式 (2.32) で得られた D_1 の解 $x = -8z$、および、式 (2.24) と式 (2.27) を用いると、$\omega = \omega_0$ に対して、

$$p_1 = -\frac{2M}{\gamma\alpha r}\sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m_{\mathrm{air}}}}\left(\frac{h}{H_0}\right)^2 \tag{2.38}$$

が得られる。分岐が出現しない場合には、分枝が切り替わる圧力 $p_2 = p(D_2)$ において回転速度や磁化の ω 依存性にカスプが生じる。その圧力は、式 (2.32) で得られた D_2 の解 $x = (-2yz - 2\sqrt{y^3 z})/(y - z)$ より求めることができる。

2.5　$g_{\mathrm{SR}} \neq 1$ の場合

磁気回転結合 $\mathcal{H}_{\mathrm{SR}} = -\hbar g_{\mathrm{SR}} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ の係数 g_{SR} が 1 からわずかでもずれると、前節までの回転速度 Ω_z の振る舞いが大きく変更を受ける。g_{SR} を 1 から少しずらした場合に、圧力 $p = p_1$ において回転速度 Ω_z がマイクロ波周波数 ω の関数としてどのように変化するかを図 2.5 に示す。

$g_{\mathrm{SR}} = 1$ のとき、図 2.5 (a) に示すように Ω_z は共鳴振動数に対して対称的なグラフとなるが、$g_{\mathrm{SR}} = 1.0001$ と僅かに g_{SR} の値のみを 1 からずらすと、図 2.5 (b) に示すように共鳴ピークが非対称となる。さらに g_{SR} を 1 より大きくしておくと、共鳴ピークは低周波側により傾いていく (図 2.5 (c), (d))。図には示していないが、g_{SR} を 1 よりも小さくした場合は、グラフの傾きは逆方向 (つまり高周波側) に傾く。そのため、広い周波数領域で低速解と高速解の 2 つの分岐が共存し、マイクロ波の周波数 ω を徐々に大きくしていく (もしくは小さくしていく) と、ある周波数で分枝間の飛び移りが生じる。例えば、図 2.5 (d) において、高周波数側から徐々に ω を小さくしていくと、最初は左上に伸びる高速回転側の分枝に沿って回転数が変化していくが、$\omega = 57\,\mathrm{GHz}$ 付近で低速回転側の分枝に飛び移る。このような分岐の飛び移りは、g_{SR} の 1 からのずれが大きいほど顕著になる。

このように g_{SR} の値の変化に対して定常解の振る舞いは敏感に変化するため、微粒子の回転速度の測定から g_{SR} を正確に決定できる可能性がある。これまでにも、g_{SR} の値は実験的に決定されてきた [41, 44–46] が、我々の手法を用いればより精度の高い測定が可能になると考えられる。付録 B で詳しく説明するように、g_{SR} の値の 1 からのズレは、固体中のスピン軌道相互作用に由来する。よって、g_{SR} の値の精密な測定結果から、強磁性体微粒子中のスピン軌道相互作用の情報を得ることが可能である。

2.6　本章のまとめ

本章では、空中に浮かせた強磁性微粒子を強磁性共鳴によって回転させた場合の回転速度の定常解について、LLG 方程式とオイラー方程式を用いた解析を行った。印加してい

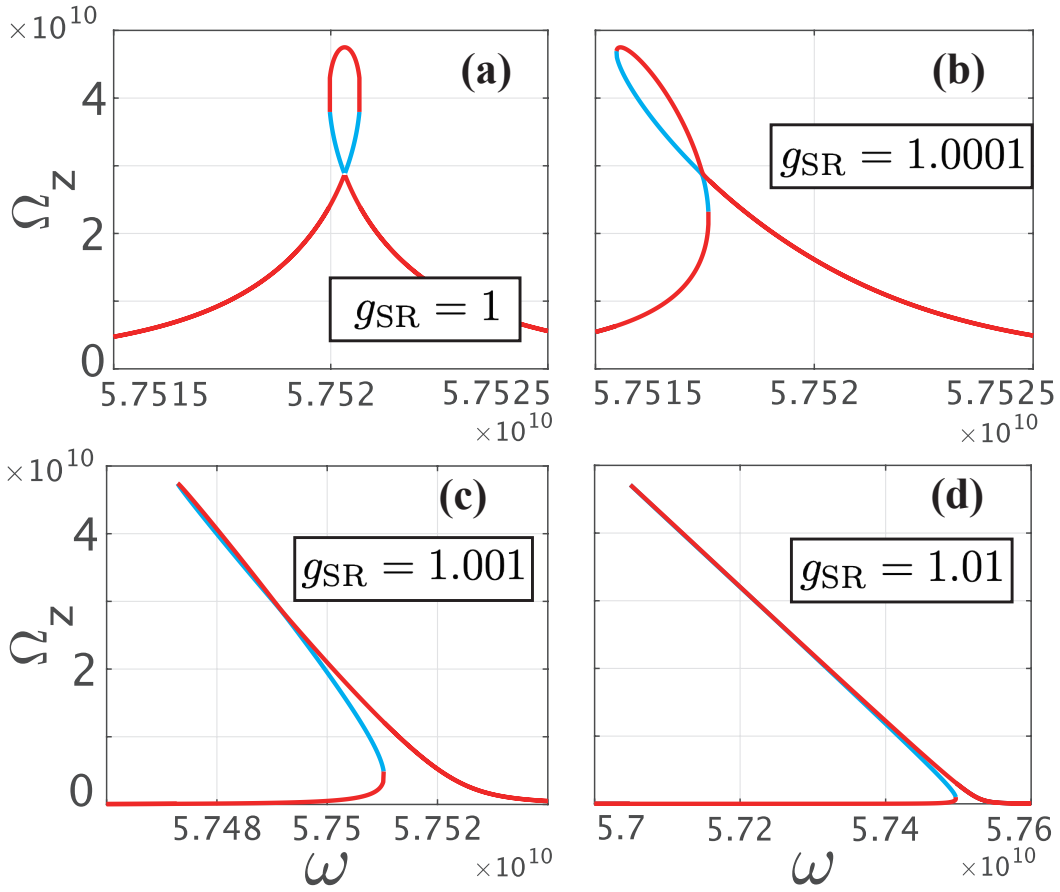

図 2.5　g_{SR} がそれぞれの大きさのときに回転速度 Ω_z をマイクロ波周波数 ω の関数としてプロットしたもの。マイクロ波振幅は $h = 4\,\mathrm{A/m}$ に固定されており、圧力も $p = 4.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa}$ としている。(a) は図 2.3(b) と全く同じ図。g_{SR} を変調すると、グラフが傾き、その変調が大きくなると傾きも大きくなっている様子が確認できる。

るマイクロ波の周波数が共鳴周波数に近いとき、微粒子を高速回転させることができる (EdH 効果)。さらに、バーネット効果を介して方程式の非線形性に由来する分岐現象が生じることが明らかになった。この分岐現象は、粒子が高速で回転しているときのみ生じ、マイクロ波振幅やギルバート減衰定数が $h/H_0 < \alpha/2$ を満たすと特定の圧力領域で生じる。また、磁気回転結合の係数 g_{SR} が 1 からずれると、微粒子の回転速度が敏感に変化することも示され、磁気回転結合の g 因子 (g_{SR}) の精密測定に利用できる可能性があることも示した。

本章では、定常回転状態における回転速度の平均値に着目した。しかし、回転速度周りのゆらぎにも重要な情報が含まれると期待される。次章では同じセットアップで、回転速度のゆらぎについて理論的に解析する。

第 3 章

浮上した強磁性微粒子の回転速度ノイズ

前章では、磁化の運動と微粒子の剛体回転を、LLG 方程式およびオイラー方程式を用いて定式化し、定常回転の平均速度を評価した。本章では、微粒子の回転速度のゆらぎに着目し、磁化から微粒子の回転運動への運動量移行に伴う非平衡ノイズを考察する。

3.1 概要

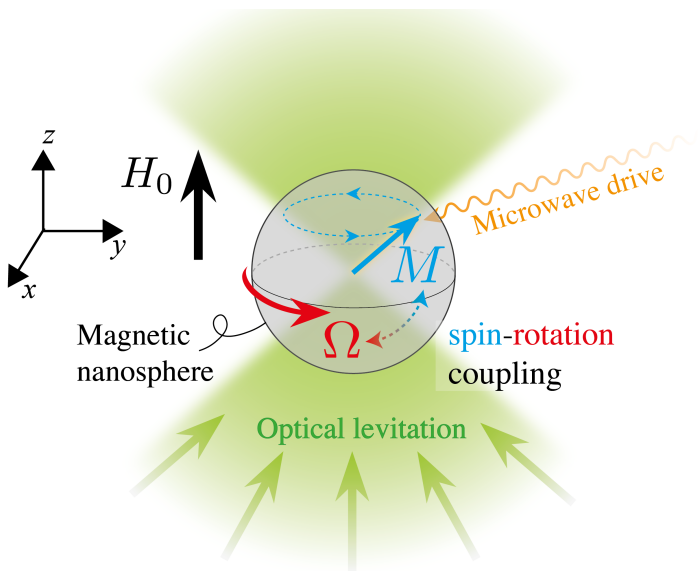

図 3.1 （再掲）我々が提案するセットアップ

光浮遊技術は、回転速度の時間発展の高精度な測定も可能にしてきた [40, 47]。実際、回転速度の時間発展を追うことにより、回転速度のノイズの測定が行われている [48]。この技術を用いて、回転速度のノイズ測定を行えば、磁化と微粒子回転の間の角運動量移行についてより詳しい情報がえられるのではないかと推測される。

本章では、前章と同じセットアップ (図 3.1) を考え、強磁性共鳴と強磁性微粒子中の磁気回転結合を用いた微粒子の定常回転に関して、平均の回転速度まわりのゆらぎ (回転ノイズ) を考察する。微粒子の回転速度ノイズを得るには、微粒子の回転運動をオイラー方程式からランジュバン方程式に置き換えるとともに、磁化の運動の記述に際して量子力学的な効果を取り入れる必要がある。これは、LLG 方程式が磁化の平均値のみを取り扱っているためである。磁化の運動のノイズを議論する一つの手法として知られているのが、stochastic LLG 方程式を用いる手法である [49]。これは、ランジュバン方程式と同じように、通常の LLG 方程式にノイズ項を付け加える方法である。しかしこの方法は平衡近傍においてのみ有効であり、我々が考えているような強い励起下の非平衡状態には適用できない。そこで我々は磁化の非平衡ノイズを求める新たな手法を、非平衡開放系の理論を用いて構築する。

前章では、圧力やギルバート減衰定数を調整することによって、共鳴周波数付近で分岐が生じることを明らかにした。分岐の近くでは、微粒子の回転速度ノイズが特に強調されることが期待される。その理由は以下の通りである。微粒子に働くトータルのトルク $f(\Omega_z)$ は一般に図 3.2 (a) のようになる。分岐が生じる方向にパラメータを変化させていくと、分岐の直前で図 3.2 (b) のようになるが、このとき安定解 $\Omega_{z,3}$ の周りでは復元力が小さくなる。微粒子に働くトルクがゆらぐと、そのゆらぎは回転速度ノイズとして現れるが、その大きさは安定解からのずれに対する復元力の大きさに依存している。特に復元力が小さくなると、トルクのゆらぎから生じる回転速度ゆらぎは大きくなる。よって、分岐付近にパラメータを調整しておくことによって、回転速度ノイズを増幅させることができると期待される。

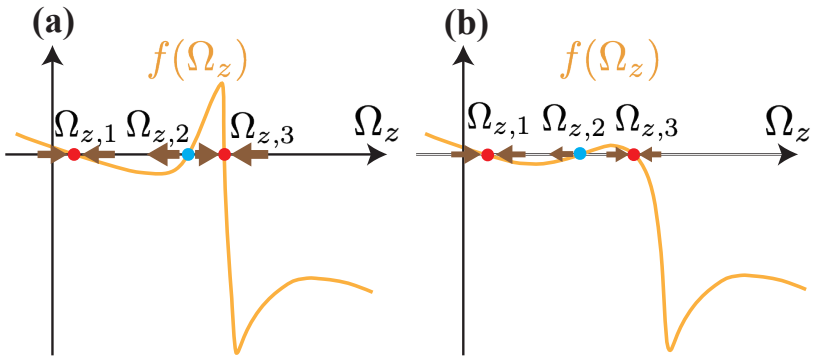

図 3.2　(a) 前章において解が三つ生じている場合の典型的なトータルトルク。(b) 分岐付近におけるトータルトルク。

3.2　GKSL 方程式

まず磁化の非平衡ノイズを計算する。図 3.3 のような非平衡開放系 (システムが熱浴と接触した系) を考える。ここでは非平衡開放系の時間発展を記述する方法として、システ

図 3.3　非平衡開放系の概念図。文献 [50] より引用。

ムの密度演算子 ρ_s の時間発展をゴリーニ–コサコフスキー–スダーシェン–リンドブラッド方程式（GKSL 方程式）と呼ばれる方程式を採用する。GKSL 方程式は一般に

$$\frac{\mathrm{d}\rho_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_s, \rho_s] + \sum_i L_i \rho_s L_i^\dagger - \sum_i \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho_s\} \tag{3.1}$$

という形で書かれる。ここで、$\mathcal{H}_s$ はシステムのハミルトニアン、L_i はリンドブラッド演算子と呼ばれるものである。このリンドブラッド演算子を含む項 (方程式右辺の第 2 項と第 3 項) がなければ、ρ_s の時間発展は通常のフォン・ノイマン方程式に帰着し、システムはユニタリな時間発展に従う。リンドブラッド演算子がシステムと熱浴との相互作用を記述する項であり、この L_i を決めれば、システムの時間発展は決定されることになる。

静磁場下におかれた強磁性体にマイクロ波を照射して、強磁性共鳴を起こす状況を考える。このとき、マイクロ波が磁化の z 成分 M_z を減らす方向に働き、それとギルバート減衰による磁化の $+z$ 方向への減衰が釣り合って、磁化の定常解が実現する。以下では、強磁性体の一様磁化を一つの大きなスピン $\boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}} \equiv \sum_i \boldsymbol{S}_i$ で取り扱い、一様磁化以外の波数成分は無視する。静磁場とマイクロ波の効果は、前章と同様、システムのハミルトニアン $\mathcal{H}_s$ に取り入れることができる:

$$\mathcal{H}_s(t) = -\hbar(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)S_z^{\mathrm{tot}} - \hbar\frac{\mu_0\gamma h}{2}(S_+^{\mathrm{tot}}e^{-i(\omega-\Omega_z)t} + S_-^{\mathrm{tot}}e^{i(\omega-\Omega_z)t}). \tag{3.2}$$

一方、ギルバート減衰を非平衡開放系の理論を用いて記述する理論は (少なくとも著者の調べた範囲では) 知られていない。そこでまず、ギルバート減衰を正しく記述する GKSL 方程式の導出を行う。

ここでは強磁性体のスピン系をシステム、格子系を熱浴とみなすことにする。このとき、ギルバート減衰は系から熱浴へ強磁性体のスピンを減少させるような散逸として解釈でき、Lindblad 演算子を $L_1 = \sqrt{\Gamma}\hat{S}_-^{\mathrm{tot}}$ とすることで記述できる[*1]。Γ は減衰のレートを表す定数であり、後で LLG 方程式との対応から決めることにする。

このとき GKSL 方程式 (3.1) は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho_s}{\mathrm{d}t} =& i\left[(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)S_z^{\mathrm{tot}} + \frac{h}{2}(S_+^{\mathrm{tot}}e^{-i(\omega-\Omega_z)t} + S_-^{\mathrm{tot}}e^{i(\omega-\Omega_z)t}), \rho_s\right] \\ &+ \Gamma S_-^{\mathrm{tot}}\rho_s S_+^{\mathrm{tot}} - \frac{\Gamma}{2}\{S_+^{\mathrm{tot}}S_-^{\mathrm{tot}}, \rho_s\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

[*1] ここではスピン系から格子への緩和過程のみを取り扱う。系が熱平衡状態に近い場合には、格子からスピン系への角運動量移行も考える必要があり、$\hat{S}_+^{\mathrm{tot}}$ を含む演算子 L_2 も導入する必要がある [51]。

となる。ここで前章と同様、微粒子の回転ベクトルは z 成分のみ持つとして、$\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$ であると仮定している。また本章では、簡単のため、磁気回転結合の係数 g_{SR} を 1 とした。GKSL 方程式に S_z^{tot}, S_+^{tot}, S_-^{tot} をかけてトレースを取ることで、スピンの期待値の時間発展方程式が導かれる:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle) = i\dfrac{\mu_0\gamma h}{2}\left[\langle S_+^{\mathrm{tot}}\rangle e^{-i(\omega-\Omega_z)t} - \langle S_-^{\mathrm{tot}}\rangle e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right] - \Gamma\langle S_+^{\mathrm{tot}} S_-^{\mathrm{tot}}\rangle, \\ \dfrac{d}{dt}(\langle S_+^{\mathrm{tot}}\rangle) = -i(\mu_0\gamma H_0 - \Omega_z)\langle S_+^{\mathrm{tot}}\rangle + i\mu_0\gamma h\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle e^{i(\omega-\Omega_z)t} + \Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}} S_+^{\mathrm{tot}}\rangle, \\ \dfrac{d}{dt}(\langle S_-^{\mathrm{tot}}\rangle) = i(\mu_0\gamma H_0 - \Omega_z)\langle S_-^{\mathrm{tot}}\rangle - i\mu_0\gamma h\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle e^{-i(\omega-\Omega_z)t} + \Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}} S_-^{\mathrm{tot}}\rangle. \end{cases} \tag{3.4}$$

ここでスピン演算子の交換関係

$$[S_i^{\mathrm{tot}}, S_j^{\mathrm{tot}}] = 2i\epsilon_{ijk} S_k^{\mathrm{tot}}, \tag{3.5}$$

を用いた (ϵ_{ijk} はエディントンのイプシロン)[*2]。

3.3　フォッカー-プランク方程式

次に、GKSL 方程式 (3.3) をフォッカー-プランク方程式に書き直す。強磁性体のスピンの古典状態は、スピンコヒーレント状態によって記述できる [3, 51]。スピンコヒーレント状態 $|\xi\rangle$ は

$$|\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{-S_0^{\mathrm{tot}}} \sum_{n=0}^{2S_0^{\mathrm{tot}}} \xi^n \sqrt{\frac{(2S_0^{\mathrm{tot}})!}{(2S_0^{\mathrm{tot}}-n)!n!}}\, \left|S_0^{\mathrm{tot}}, S_0^{\mathrm{tot}}-n\right\rangle \tag{3.6}$$

で定義される。ここで $|S_0^{\mathrm{tot}}, S_0^{\mathrm{tot}}-n\rangle$ は、スピンの大きさが S_0^{tot}、スピンの z 成分が $S_0^{\mathrm{tot}}-n$ の状態を表している。また、$(1+|\xi|^2)^{-S_0^{\mathrm{tot}}}$ は規格化定数である。実際に $\xi = e^{i\phi}\tan\frac{\theta}{2}$ とおくと、

$$\begin{cases} \langle\xi|S_+^{\mathrm{tot}}|\xi\rangle = \langle\xi|(S_x^{\mathrm{tot}} + iS_y^{\mathrm{tot}})|\xi\rangle = S_0^{\mathrm{tot}}\sin\theta e^{i\phi}\left(= S_0^{\mathrm{tot}}\frac{2\xi}{1+|\xi|^2}\right) \\ \langle\xi|S_-^{\mathrm{tot}}|\xi\rangle = \langle\xi|(S_x^{\mathrm{tot}} - iS_y^{\mathrm{tot}})|\xi\rangle = S_0^{\mathrm{tot}}\sin\theta e^{-i\phi}\left(= S_0^{\mathrm{tot}}\frac{2\xi^*}{1+|\xi|^2}\right) \\ \langle\xi|S_z^{\mathrm{tot}}|\xi\rangle = S_0^{\mathrm{tot}}\cos\theta\left(= S_0^{\mathrm{tot}}\frac{1-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

となるので、$|\xi\rangle$ はスピンが (θ, ϕ) の方向を向いた状態であるということがわかる。

このスピンコヒーレント状態を用いて、系の密度行列を

$$\rho_s = \int d^2\xi\, P(\xi, \xi^*, t)\, |\xi\rangle\langle\xi| \tag{3.8}$$

[*2] 本来この交換関係はそれぞれのサイトのスピンに対して成立するが、全体のスピンに対しても同様の交換関係が成り立つことを示せる。添字について、本論文ではアインシュタインの縮約を用いている。

と展開する。この密度行列 ρ_s にスピン演算子を作用させると、

$$\begin{aligned} S_z^{\mathrm{tot}}\,|\xi\rangle\langle\xi| &= \left(S_0^{\mathrm{tot}} - \xi\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{2S_0^{\mathrm{tot}}|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)|\xi\rangle\langle\xi| \\ &= \left(-\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + S_0^{\mathrm{tot}}\frac{1-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)|\xi\rangle\langle\xi|\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

などが得られる。これらの式を用いると、GKSL 方程式 (3.3) は以下のフォッカー-プランク方程式に帰着する [51]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} =& \Big\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-i(\omega_0-\Omega_z)\xi - i\Omega(\xi^2 e^{-i(\omega-\Omega_z)t} - e^{i(\omega-\Omega_z)t}) - \Gamma(S_0^{\mathrm{tot}}+1)\xi\right] + \mathrm{h.c.} \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{\Gamma}{2}\xi^2 + \mathrm{h.c.} + \Gamma\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}\Big\}P \end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで $\Omega = -\mu_0\gamma h/2$、$\omega_0 = -\mu_0\gamma H_0$ とした。

しかしこのフォッカー-プランク方程式は、$e^{i(\omega-\Omega_z)t}$ などの時間依存する項を含んでおり、解析が難しい。そのため、このマイクロ波による時間依存性を取り除くため、

$$\tau = \xi e^{-i(\omega-\Omega_z)t}, \tag{3.11}$$

によって ξ から τ への変数変換を行い、$P(\xi,\xi^*,t)$ を $W(\tau,\tau^*,t)$ と書き直す (文献 [52] の 4.9 章を参照)。この際、$\mathrm{Tr}\{\rho_s\} = 1$ となることを考慮すると

$$\int d^2\xi\, P(\xi,\xi^*,t) = \int d^2\tau\, W(\tau,\tau^*,t) \tag{3.12}$$

を満たさなくてはならないが、$(\xi,\xi^*) \to (\tau,\tau^*)$ の変数変換におけるヤコビアンは 1 なので、$W(\tau,\tau^*,t) = P(\xi,\xi^*,t)$ となる。

次に時間微分項を考えると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\xi &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\tau + \left(-i(\omega-\Omega_z)\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \mathrm{h.c.}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\tau + \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}i(\omega-\Omega_z)\tau + \mathrm{h.c.}\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。ここで $(\cdots)_\xi$ は ξ と ξ^* を固定していることを示している。また ξ 微分に関しては

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial\tau}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial\tau^*}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\tau^*} = e^{-i(\omega-\Omega_z)t}\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{3.14}$$

である。以上からフォッカー-プランク方程式 (3.10) を変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = \Big\{&\frac{\partial}{\partial\tau}\left[i(\omega-\omega_0)\tau - i\Omega(\tau^2-1) - \Gamma(S_0^{\mathrm{tot}}+1)\tau\right] + \mathrm{h.c.} \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{\Gamma}{2}\tau^2 + \mathrm{h.c.} + \Gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\tau^*}\Big\}W \end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。ここで W は実数であることを用いた。

続いて、強磁性体の全体のスピン $S_0^{\rm tot}$ が十分に大きいとして、$S_0^{\rm tot}$ のリーディングオーダーまでで計算する。このときフォッカー-プランク方程式 (3.15) は

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[i(\omega - \omega_0)\tau - i\Omega(\tau^2 - 1) - \Gamma S_0^{\rm tot}\tau \right] + \text{h.c.} \right\} W \tag{3.16}$$

となる。この方程式には定常解 $W_{\rm st}$ が存在し

$$W_{\rm st} = \delta^2(\tau - \tau_1), \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 \equiv \frac{1}{2\Omega} \Big[&(\omega - \omega_0) + \Gamma S_0^{\rm tot} i \\ &+ e^{i\theta_1/2} \left\{ \left[(\omega - \omega_0)^2 + 4\Omega^2 - (\Gamma S_0^{\rm tot})^2 \right]^2 + 4(\Gamma S_0^{\rm tot})^2(\omega - \omega_0)^2 \right\}^{1/4} \Big], \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$e^{i\theta_1} \equiv \frac{\left[(\omega - \omega_0) + \Gamma S_0^{\rm tot} i \right]^2 + 4\Omega^2}{\sqrt{\left[(\omega - \omega_0)^2 + 4\Omega^2 - (\Gamma S_0^{\rm tot})^2 \right]^2 + 4(\Gamma S_0^{\rm tot})^2(\omega - \omega_0)^2}}, \tag{3.19}$$

で与えられる[*3]。この $W_{\rm st}$ の定常状態は

$$\rho_s(t) = \int d^2\tau\, W_{\rm st} \left| \tau e^{i(\omega - \Omega_z)t} \right\rangle \left\langle \tau e^{i(\omega - \Omega_z)t} \right| = \left| \tau_1 e^{i(\omega - \Omega_z)t} \right\rangle \left\langle \tau_1 e^{i(\omega - \Omega_z))t} \right| \tag{3.20}$$

に対応する。密度行列が $\rho_s = \left| \tau_1 e^{i(\omega - \Omega_z)t} \right\rangle \left\langle \tau_1 e^{i(\omega - \Omega_z)t} \right|$ で与えられるとき、スピン演算子のノイズを $S_0^{\rm tot}$ のリーディングオーダーで評価すると、

$$\langle {S_z^{\rm tot}}^2 \rangle - \langle S_z^{\rm tot} \rangle^2 \simeq \frac{2S_0^{\rm tot}|\tau_1|^2}{(1 + |\tau_1|^2)^2}, \tag{3.21}$$

$$\langle S_+^{\rm tot} S_-^{\rm tot} \rangle - \langle S_+^{\rm tot} \rangle \langle S_-^{\rm tot} \rangle \simeq \frac{2S_0}{(1 + |\tau_1|^2)^2}, \tag{3.22}$$

$$\langle S_z^{\rm tot} S_+^{\rm tot} \rangle - \langle S_z^{\rm tot} \rangle \langle S_+^{\rm tot} \rangle \simeq \frac{2S_0\tau_1|\tau_1|^2 e^{i(\omega - \Omega_z)t}}{(1 + |\tau_1|^2)^2}, \tag{3.23}$$

$$\langle S_z^{\rm tot} S_-^{\rm tot} \rangle - \langle S_z^{\rm tot} \rangle \langle S_-^{\rm tot} \rangle \simeq \frac{2S_0\tau_1^* e^{-i(\omega - \Omega_z)t}}{(1 + |\tau_1|^2)^2}, \tag{3.24}$$

となる。以上を用いれば、式 (3.4) は $S_0^{\rm tot}$ のリーディングオーダーまでで

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\langle S_z^{\rm tot} \rangle) = i\dfrac{\mu_0\gamma h}{2} \left[\langle S_+^{\rm tot} \rangle e^{-i(\omega - \Omega_z)t} - \langle S_-^{\rm tot} \rangle e^{i(\omega - \Omega_z)t} \right] - \Gamma \langle S_+^{\rm tot} \rangle \langle S_-^{\rm tot} \rangle, \\ \dfrac{d}{dt}(\langle S_+^{\rm tot} \rangle) = -i(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)\langle S_+^{\rm tot} \rangle + i\mu_0\gamma h \langle S_z^{\rm tot} \rangle e^{i(\omega - \Omega_z)t} + \Gamma \langle S_z^{\rm tot} \rangle \langle S_+^{\rm tot} \rangle, \\ \dfrac{d}{dt}(\langle S_-^{\rm tot} \rangle) = i(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)\langle S_-^{\rm tot} \rangle - i\mu_0\gamma h \langle S_z^{\rm tot} \rangle e^{-i(\omega - \Omega_z)t} + \Gamma \langle S_z^{\rm tot} \rangle \langle S_-^{\rm tot} \rangle, \end{cases} \tag{3.25}$$

となる。

[*3] 式 (3.16) の定常解を求める際、式 (3.18) の 2 段目 $+e^{i\theta_1/2}\cdots$ は、本来 $\pm e^{i\theta_1/2}\cdots$ として現れる。しかし、我々が考えている $S_z^{\rm tot} \leq 0$ という状況は、符号がプラスの状態に対応する。仮に $S_z^{\rm tot} \geq 0$ という状況を考える場合は、符号をマイナスに取ることになる（詳細は付録 D を参照）。

3.4　フォッカー-プランク方程式と LLG 方程式の対応関係

GKSL 方程式の結果 (3.25) と LLG 方程式の結果を比較し、ギルバート減衰のレート Γ を決定する。微粒子に固定した座標系から見た LLG 方程式は

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \mu_0 \gamma \boldsymbol{H} + \frac{\alpha}{M_0} \boldsymbol{M} \times \dot{\boldsymbol{M}}, \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{H} = (h\cos(\omega - \Omega_z)t, h\sin(\omega - \Omega_z)t, H_0), \tag{3.27}$$

で与えられる。全体のスピン $\boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}} = \frac{V}{\hbar\gamma}\boldsymbol{M}$（$V$ は体積）を用いて書き直すと、

$$\dot{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}} \times \mu_0 \gamma \boldsymbol{H} - \frac{\alpha}{S_0^{\mathrm{tot}}} \boldsymbol{S}^{\mathrm{tot}} \times \dot{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{tot}} \tag{3.28}$$

となる。ここで $S_0^{\mathrm{tot}} = |VM_0/\hbar\gamma| = -VM_0/\hbar\gamma$ である[*4]。各成分ごとで書くと、

$$\begin{cases} \dot{S}_z^{\mathrm{tot}} = i\dfrac{\mu_0\gamma h}{2}\left[S_+^{\mathrm{tot}} e^{-i(\omega-\Omega_z)t} - S_-^{\mathrm{tot}} e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right] - \dfrac{\alpha}{S_0^{\mathrm{tot}}}\dfrac{1}{2i}\left[S_-^{\mathrm{tot}}\dot{S}_+^{\mathrm{tot}} - S_+^{\mathrm{tot}}\dot{S}_-^{\mathrm{tot}}\right], \\ \dot{S}_+^{\mathrm{tot}} = -i(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)S_+^{\mathrm{tot}} + i\mu_0\gamma h S_z^{\mathrm{tot}} e^{i(\omega-\Omega_z)t} - i\dfrac{\alpha}{S_0^{\mathrm{tot}}}\left[S_z^{\mathrm{tot}}\dot{S}_+^{\mathrm{tot}} - S_+^{\mathrm{tot}}\dot{S}_z^{\mathrm{tot}}\right], \\ \dot{S}_-^{\mathrm{tot}} = i(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)S_-^{\mathrm{tot}} - i\mu_0\gamma h S_z^{\mathrm{tot}} e^{-i(\omega-\Omega_z)t} + i\dfrac{\alpha}{S_0^{\mathrm{tot}}}\left[S_z^{\mathrm{tot}}\dot{S}_-^{\mathrm{tot}} - S_-^{\mathrm{tot}}\dot{S}_z^{\mathrm{tot}}\right], \end{cases} \tag{3.29}$$

となる。さらに、本論文で考察する定常状態 ($\dot{S}_z^{\mathrm{tot}} = 0$) に対して、$\dot{S}_\pm^{\mathrm{tot}} = S_\pm^{\mathrm{tot}} e^{\pm i(\omega-\Omega_z)t}$ が成り立つことを用いると、

$$\begin{cases} \dot{S}_z^{\mathrm{tot}} = i\dfrac{\mu_0\gamma h}{2}\left[S_+^{\mathrm{tot}} e^{-i(\omega-\Omega_z)t} - S_-^{\mathrm{tot}} e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right] - \dfrac{\alpha(\omega-\Omega_z)}{S_0^{\mathrm{tot}}} S_-^{\mathrm{tot}} S_+^{\mathrm{tot}} = 0, \\ \dot{S}_+^{\mathrm{tot}} = -i(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)S_+^{\mathrm{tot}} + i\mu_0\gamma h S_z^{\mathrm{tot}} e^{i(\omega-\Omega_z)t} + \dfrac{\alpha(\omega-\Omega_z)}{S_0^{\mathrm{tot}}} S_z^{\mathrm{tot}} S_+^{\mathrm{tot}}, \\ \dot{S}_-^{\mathrm{tot}} = i(\mu_0\gamma H_0 + \Omega_z)S_-^{\mathrm{tot}} - i\mu_0\gamma h S_z^{\mathrm{tot}} e^{-i(\omega-\Omega_z)t} + \dfrac{\alpha(\omega-\Omega_z)}{S_0^{\mathrm{tot}}} S_z^{\mathrm{tot}} S_-^{\mathrm{tot}}, \end{cases} \tag{3.30}$$

となる。これと、GKSL 方程式から導出した式 (3.25) が一致することを要請すると、最終的に GKSL 方程式中の緩和レート Γ は、

$$\Gamma = \frac{\alpha(\omega - \Omega_z)}{S_0^{\mathrm{tot}}} \tag{3.31}$$

と表され、ギルバート減衰係数 α と対応関係があることがわかる。

3.5　確率マスター方程式

前節までで、強磁性共鳴を GKSL 方程式を用いて量子的に定式化し、強磁性体のスピン系の時間発展を記述することができた。しかし、微粒子が受けるトルクのゆらぎを評価

[*4] $\gamma < 0$ に注意。

するためには、系の密度演算子 ρ_s の時間発展を決定するだけでは不十分であり、緩和過程における角運動量移行をより詳しく記述する必要がある。本節では、角運動量移行に伴う量子状態の遷移を確率過程として定式化する。

十分短い時間 dt に対して、時刻 t から $t+dt$ までの間の、リンドブラッド演算子 L_1 によるスピン系から格子系への角運動量移行に着目する。このとき、(i) スピン系から熱浴へ角運動量が移行しない、もしくは、(ii) スピン系から $\hbar$ の角運動量が熱浴に移行する、の 2 通りの結果が確率的に生じる。この確率過程はポアソン過程であるとすると、結果 (ii) が起きる確率 p_1 は、$M_1(dt)=\sqrt{dt}L_1$ を用いて

$$p_1(dt)=\langle M_1^\dagger(dt)M_1(dt)\rangle=\mathrm{Tr}\left[L_1^\dagger L_1\rho\right]dt \tag{3.32}$$

となる。また結果 (i) が生じる確率 p_0 は $p_0(dt)=1-p_1(dt)$ となる。時刻 t から $t+dt$ までの間に角運動量移行が観測された数を $dn(t)$ と書くと、$dn(t)$ は 0 が 1 の値をとる確率変数となる。このとき

$$(dn(t))^2=dn(t), \tag{3.33}$$

$$\langle dn(t)\rangle=0\times p_0(dt)+1\times p_1(dt)=dt\langle L_1^\dagger L_1\rangle \tag{3.34}$$

となる[*5]。この $dn(t)$ を用いると、ある時刻 t に格子系に移行する角運動量、つまり微粒子に働くギルバート減衰由来のトルク $K_g(t)$ の平均値 $\langle K_g(t)\rangle$ とそのまわりの揺らぎ $\xi_g(t)=K_g(t)-\langle K_g(t)\rangle$ は

$$\langle K_g(t)\rangle=\left\langle\hbar\frac{dn(t)}{dt}\right\rangle, \tag{3.35}$$

$$\xi_g(t)=\hbar\frac{dn(t)}{dt}-\hbar\left\langle\frac{dn(t)}{dt}\right\rangle \tag{3.36}$$

と書ける。これは、$dn(t)=1$ を観測したとき微粒子には単位時間あたり $\hbar$ のトルクが加わり、$dn(t)=0$ を観測したときはトルクが働かないということを意味している。

次に、時刻 t と時刻 $t+\Delta t$ $(\Delta t>0)$ でのトルクの相関 $\langle K_g(t)K_g(t+\Delta t)\rangle$ を計算する:

$$\begin{aligned}
&\langle K_g(t)K_g(t+\Delta t)\rangle=\hbar^2\langle dn(t)dn(t+\Delta t)\rangle\\
&=\hbar^2\sum_{dn(t)=0,1}\sum_{dn(t+\Delta t)=0,1}dn(t)dn(t+\Delta t)\times(dn(t)\text{ かつ }dn(t+\Delta t)\text{ を観測する確率})\\
&=\hbar^2\times(dn(t)=1\text{ かつ }dn(t+\Delta t)=1\text{ を観測する確率})\\
&=\hbar^2\times\langle dn(t)\rangle\\
&\quad\times(dn(t)=1\text{ を観測したとき、}dn(t+\Delta t)=1\text{ を観測する条件付き確率})
\end{aligned} \tag{3.37}$$

となる。確率マスター方程式の議論を用いると、$dn(t)=1$ を観測したとき、システムの密度演算子 $\rho_s(t)$ は $\frac{L_1\rho_sL_1^\dagger}{\langle L_1^\dagger L_1\rangle}$ と変更される。この状態を GKSL 方程式で時間発展させ

[*5] この期待値 $\langle dn(t)\rangle$ を dt で割れば、単位時間あたりに角運動量が移行する回数 $I(t)$ が求まる。実際、$\langle I(t)\rangle=\langle L_1^\dagger L_1\rangle=\Gamma\langle S_+S_-\rangle\simeq\Gamma\frac{4S_0^2|\tau_1|^2+2S_0}{(1+|\tau_1|^2)^2}$ となり、これに $\hbar$ をかければ $S_0\to\infty$ で LLG 方程式の結果（$\langle K_g\rangle=\hbar\alpha\omega(S_0^2-S_z^2)/S_0$）を再現する。

ると、

$$\rho_s(t+\Delta t) = e^{\mathcal{L}\Delta t}\frac{L_1\rho_s L_1^\dagger}{\langle L_1^\dagger L_1\rangle}, \tag{3.38}$$

が得られる。ここで $\mathcal{L}$ は、式 (3.3) の GKSL 方程式を

$$\frac{\mathrm{d}\rho_s}{\mathrm{d}t} = \mathcal{L}\rho_s, \tag{3.39}$$

と表記したときの超演算子である。式 (3.38) より $dn(t+\Delta t)=1$ を観測する確率 p_1' は

$$p_1' = \left\langle L_1^\dagger L_1 e^{\mathcal{L}\Delta t}\frac{L_1\rho_s L_1^\dagger}{\langle L_1^\dagger L_1\rangle}\right\rangle dt \tag{3.40}$$

となる。これが式 (3.37) の最後の式に登場する条件付き確率そのものとなっている。$\langle dn(t)\rangle = dt\langle L_1^\dagger L_1\rangle$ に注意すると、結局式 (3.37) は

$$\langle K_g(t)K_g(t+\Delta t)\rangle = \hbar^2\,(dt)^2\left\langle L_1^\dagger L_1 e^{\mathcal{L}\Delta t}L_1\rho_s L_1^\dagger\right\rangle \tag{3.41}$$

と表される。また、トルクの揺らぎ $\xi_g(t) = K_g(t) - \langle K_g(t)\rangle$ の異時刻相関は

$$\begin{aligned}\langle \xi_g(t+\Delta t)\xi_g(t)\rangle &= \langle K_g(t+\Delta t)K_g(t)\rangle - \langle K_g(t)\rangle^2 \\ &= \hbar^2\left[\left\langle L_1^\dagger L_1 e^{\mathcal{L}\Delta t}L_1\rho_s L_1^\dagger\right\rangle - \langle L_1^\dagger L_1\rangle^2\right]\end{aligned} \tag{3.42}$$

となる。

ここまでの議論は $\Delta t > 0$ を仮定しており、$\Delta t = 0$ については別個に計算する必要がある。$\Delta t = 0$ において $dn(t)dn(t+\Delta t) = dn(t)$ となることを用いると、$\Delta t = 0$ のときは

$$\begin{aligned}\langle \xi_g(t)\xi_g(t+\Delta t)\rangle &= \hbar^2\left\langle\frac{dn(t)dn(t+\Delta t)}{dt^2}\right\rangle - \hbar^2\left\langle\frac{dn(t)}{dt}\right\rangle^2 \simeq \hbar^2\frac{\langle dn(t)\rangle}{dt^2} \\ &= \hbar^2\frac{\langle L_1^\dagger L_1\rangle}{dt} \simeq \hbar^2\delta(\Delta t)\langle L_1^\dagger L_1\rangle\end{aligned} \tag{3.43}$$

となる。この寄与は角運動量移行が $\hbar$ を単位として起こっていることを意味する。本研究では、この寄与をショットノイズと呼ぶことにする[*6]。以上の結果 (3.42)(3.43) より、揺らぎ $\xi_g(t)$ の相関は、$\Delta t \geq 0$ に対して、

$$\langle \xi_g(t)\xi_g(t+\Delta t)\rangle = \hbar^2\left(\delta(\Delta t)\langle L_1^\dagger L_1\rangle + \left\langle L_1^\dagger L_1 e^{\mathcal{L}\Delta t}L_1\rho_s L_1^\dagger\right\rangle - \langle L_1^\dagger L_1\rangle^2\right) \tag{3.44}$$

となる。第一項のデルタ関数的な振る舞いをする部分がショットノイズを表している。

[*6] 電子の電荷が e であることを反映した電流ノイズをショットノイズと呼ぶこととの類似性より。

3.6　ギルバート減衰によって生じるトルクの時間相関の計算

本節では、前節で導出したトルクの時間相関を具体的に計算する。異時刻相関 (3.41) を計算するため、密度行列を

$$\rho_s(t) = \int d^2\tau' W(\tau', \tau'^*, t) \left|\tau' e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle \left\langle \tau' e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right|, \tag{3.45}$$

と展開した時のフォッカー-プランク方程式 (3.16) を考える。強磁性共鳴の定常状態は $W_{\rm st} = \delta^2(\tau - \tau_1)$ と記述されるが、系の状態は定常状態の近傍にあることを仮定して、$\tau' = \tau_1$ 近傍のみを考慮し、$\tau'^2 \simeq \tau_1^2 + 2\tau_1\Delta\tau = 2\tau_1\tau' - \tau_1^2$ とする。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \mathcal{G} W, \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(i\Omega(1+\tau_1^2) + \left(i(\omega-\omega_0) - 2i\Omega\tau_1 - \Gamma S_0^{\rm tot}\right)\tau'\right) + \text{h.c.} \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial \tau'}\left(i(\omega-\omega_0) - 2i\Omega\tau_1 - \Gamma S_0^{\rm tot}\right)\left(\tau' - \frac{i\Omega(1+\tau_1^2)}{-i(\omega-\omega_0) + 2i\Omega\tau_1 + \Gamma S_0^{\rm tot}}\right) + \text{h.c.},\end{aligned} \tag{3.47}$$

となる。初期状態 $W_0(\tau', \tau'^*, t=0) = \delta^2(\tau' - \tau)$ を t 秒だけ時間発展させたときの解は、

$$\begin{aligned}W(\tau', \tau'^*, t) &\equiv e^{\mathcal{G}t} W_0 \\ &= \delta^2\Bigg[\tau' - \frac{i\Omega(1+\tau_1^2)}{-i(\omega-\omega_0) + 2i\Omega\tau_1 + \Gamma S_0^{\rm tot}} \\ &\qquad - \left(\tau - \frac{i\Omega(1+\tau_1^2)}{-i(\omega-\omega_0) + 2i\Omega\tau_1 + \Gamma S_0^{\rm tot}}\right) e^{\left[i(\omega-\omega_0) - 2i\Omega\tau_1 - \Gamma(S_0^{\rm tot}+1)\right]t}\Bigg] \\ &= \delta^2\left(\tau' - \tau_1 - (\tau - \tau_1)\, e^{\left[i(\omega-\omega_0) - 2i\Omega\tau_1 - \Gamma(S_0^{\rm tot}+1)\right]t}\right),\end{aligned} \tag{3.48}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}&\Omega\tau_1^2 - \left[(\omega-\omega_0) + \Gamma S_0^{\rm tot} i\right]\tau_1 - \Omega = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad \tau_1(-i(\omega-\omega_0) + 2i\Omega\tau_1 + \Gamma S_0^{\rm tot}) - i\Omega(1+\tau_1^2) = 0,\end{aligned} \tag{3.49}$$

を用いた[*7]。

以上を用いて、$L_1 = \sqrt{\Gamma} S_-^{\rm tot}$ とした時のトルクのゆらぎ (式 (3.41)) を計算する。まず、

$$\begin{aligned}&S_-^{\rm tot}\left|\tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle\left\langle \tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right| S_+^{\rm tot} \\ &= \left(\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau|^2 + 2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau|^2)^2} + \frac{2S_0^{\rm tot}\tau}{1+|\tau|^2}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{2S_0^{\rm tot}\tau^*}{1+|\tau|^2}\frac{\partial}{\partial\tau^*} + \frac{\partial^2}{\partial\tau^*\partial\tau}\right) \\ &\quad \times \left|\tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle\left\langle \tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right|,\end{aligned} \tag{3.50}$$

[*7] これは $\Delta t \to \infty$ で定常状態 $\tau' = \tau_1$ に行くので妥当な結論と思える。

と書けること [51]、および、式 (3.45) の展開を用いると、

$$
\begin{aligned}
&S_-^{\rm tot}\rho(t)S_+^{\rm tot}\\
&=\int d^2\tau\left\{\left[\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau|^2)^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau}{1+|\tau|^2}-\frac{\partial}{\partial\tau^*}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau^*}{1+|\tau|^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^*\partial\tau}\right]W(\tau,\tau^*,t)\right\}\\
&\qquad\qquad\times\left|\tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle\left\langle\tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right|,
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

となる。この変形により、$e^{\mathcal{L}\Delta t}$ は $\left|\tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle\left\langle\tau e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right|$ のみに作用することになる。よって

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^2\,{\rm Tr}\left[S_+^{\rm tot}S_-^{\rm tot}e^{\mathcal{L}\Delta t}S_-^{\rm tot}\rho(t)S_+^{\rm tot}\right]=\Gamma^2\,{\rm Tr}\left[S_+^{\rm tot}S_-^{\rm tot}e^{\mathcal{L}\Delta t}S_-^{\rm tot}\rho(t)S_+^{\rm tot}\right] \qquad (3.52)\\
&=\Gamma^2\int d^2\tau\left(\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau|^2)^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau}{1+|\tau|^2}-\frac{\partial}{\partial\tau^*}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau^*}{1+|\tau|^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^*\partial\tau}\right)W(\tau,\tau^*,t)\\
&\qquad\times{\rm Tr}\left\{S_+^{\rm tot}S_-^{\rm tot}\int d^2\tau'\delta^2(\tau'-\tau)e^{\mathcal{L}\Delta t}\left|\tau' e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle\left\langle\tau' e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right|\right\}\\
&=\Gamma^2\int d^2\tau\left(\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau|^2)^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau}{1+|\tau|^2}-\frac{\partial}{\partial\tau^*}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau^*}{1+|\tau|^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^*\partial\tau}\right)W(\tau,\tau^*,t)\\
&\qquad\times\int d^2\tau'\left\langle\tau' e^{i(\omega-\Omega_z)(t+\Delta t)}\right|S_+^{\rm tot}S_-^{\rm tot}\left|\tau' e^{i(\omega-\Omega_z)(t+\Delta t)}\right\rangle e^{\mathcal{G}\Delta t}\delta^2(\tau'-\tau)\\
&=\Gamma^2\int d^2\tau\left(\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau|^2)^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau}{1+|\tau|^2}-\frac{\partial}{\partial\tau^*}\frac{2S_0^{\rm tot}\tau^*}{1+|\tau|^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^*\partial\tau}\right)\delta^2(\tau-\tau_1)\\
&\qquad\times\int d^2\tau'\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau'|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau'|^2)^2}\delta^2\left(\tau'-\tau_1-(\tau-\tau_1)\,e^{\left[i(\omega-\omega_0)-2i\Omega\tau_1-\Gamma(S_0^{\rm tot}+1)\right]t}\right)\\
&\simeq\left(\Gamma\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau_1|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau_1|^2)^2}\right)^2\\
&+16\Gamma^2\frac{{S_0^{\rm tot}}^3|\tau_1|^2(1-|\tau_1|^2)}{(1+|\tau_1|^2)^4}e^{-\Delta t(2\Omega\,{\rm Im}(\tau_1)-\Gamma S_0^{\rm tot})}\cos\left(-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1)\right)\Delta t,
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

となる。この式の第一項は $\Gamma^2\langle S_+^{\rm tot}S_-^{\rm tot}\rangle^2=\langle L_1^\dagger L_1\rangle^2$ となることに注意すると、式 (3.42) で与えられるトルクの時間相関関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar^2}\left\langle\xi_g(t+\Delta t)\xi_g(t)\right\rangle=16\Gamma^2\frac{{S_0^{\rm tot}}^3|\tau_1|^2(1-|\tau_1|^2)}{(1+|\tau_1|^2)^4}e^{-\Delta t(2\Omega\,{\rm Im}(\tau_1)-\Gamma S_0^{\rm tot})}\\
\times\cos\left(-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1)\right)\Delta t,
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

となる。

最後に同時刻のときの相関 (3.43) も含めると、

$$
\langle L_1^\dagger L_1\rangle=\Gamma\frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau_1|^2+2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau_1|^2)^2},
\tag{3.55}
$$

より、最終的なトルクの揺らぎ $\langle \xi_g(t)\xi_g(t+\Delta t)\rangle\,(\Delta t \geq 0)$ の表式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\hbar^2}\langle \xi_g(t)\xi_g(t+\Delta t)\rangle \qquad (3.56)\\
&= \Gamma \frac{4{S_0^{\mathrm{tot}}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\mathrm{tot}}}{(1+|\tau_1|^2)^2}\delta(\Delta t)\\
&\quad + 16\Gamma^2 \frac{{S_0^{\mathrm{tot}}}^3|\tau_1|^2(1-|\tau_1|^2)}{(1+|\tau_1|^2)^4} e^{-\Delta t(2\Omega\,\mathrm{Im}(\tau_1)-\Gamma S_0^{\mathrm{tot}})}\cos\left(-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,\mathrm{Re}(\tau_1)\right)\Delta t\\
&= \Gamma \frac{4{S_0^{\mathrm{tot}}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\mathrm{tot}}}{(1+|\tau_1|^2)^2}\delta(\Delta t)\\
&\quad + 16\Gamma^2 \frac{{S_0^{\mathrm{tot}}}^3|\tau_1|^2(1-|\tau_1|^2)}{(1+|\tau_1|^2)^4} e^{\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle\Delta t}\cos\left(-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,\mathrm{Re}(\tau_1)\right)\Delta t
\end{aligned}
$$

となる。最後の等式では、τ_1 の具体的な表式 (3.18) から $2\Omega\,\mathrm{Im}(\tau_1) - \Gamma S_0^{\mathrm{tot}} = -\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle$ となること（計算の詳細は付録 D 参照）を用いた[*8]。第一項はデルタ関数的な振る舞いをするショットノイズを表しており、第二項は振動しながら減衰するような振る舞いをしている。

3.7　回転速度ノイズの計算

本節では、微粒子の回転速度のノイズを求める。そのためには、前節で議論したギルバート減衰に由来するトルクのノイズに加えて、空気抵抗のノイズの効果を考慮する必要がある。本研究では空気抵抗の平均トルク $\langle K_{air}\rangle$ に揺動項を付け加えて、

$$K_{air} = \langle K_{air}\rangle + \sqrt{2D}\xi_{air}(t) \qquad (3.57)$$

と定式化する。ここで $\xi_{air}(t)$ はガウス分布に従う確率変数であり、

$$\langle \xi_{air}(t)\rangle = 0, \qquad \langle \xi_{air}(t)\xi_{air}(t')\rangle = \delta(t-t'), \qquad (3.58)$$

を満たすとする。また D は拡散係数であり、空気抵抗の平均トルクを $\langle K_{air}\rangle = -\beta\Omega_z$ としたとき、揺動散逸定理によって、

$$D = \beta k_B T, \qquad (3.59)$$

という関係が成り立つ [53, 54]。

これらの平均トルクとトルクゆらぎを用いると、我々のセットアップでの回転速度を記述するランジュバン方程式は

$$I\dot{\Omega}_z = \langle K_{air}(\Omega_z)\rangle + \langle K_g(\Omega_z)\rangle + \sqrt{2D}\xi_{air}(t) + \xi_g(t) \qquad (3.60)$$

[*8] 以上の計算で相関関数が時間と共に減衰していくためには $\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle$ が負である必要であるが、我々のセットアップでは、静磁場を $+z$ 方向に印加しており、S_z は $-z$ 方向を向くものとして扱っていたので、以上より相関関数 (3.56) は実際に時間とともに減衰する。

と書き表される。ここで、回転速度の定常解を $\langle\Omega_z\rangle_0$ とし、回転速度のゆらぎ $\Delta\Omega_z = \Omega_z - \langle\Omega_z\rangle_0$ が十分小さいとすると、ギルバート減衰由来のトルクは

$$\langle K_g(\Omega_z)\rangle \simeq \langle K_g(\langle\Omega_z\rangle_0)\rangle + \left.\frac{\partial\langle K_g\rangle}{\partial\Omega_z}\right|_{\Delta\Omega_z=0}\Delta\Omega_z \tag{3.61}$$

と展開できる。$\langle K_{air}(\Omega_z)\rangle = -\beta\Omega_z$ であることと、定常解に対して、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\Omega_z\rangle = \langle K_{air}(\langle\Omega_z\rangle_0)\rangle + \langle K_g(\langle\Omega_z\rangle_0)\rangle = 0, \tag{3.62}$$

が成り立つことから、ランジュバン方程式 (3.60) は

$$I\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\Omega_z = -\epsilon\,\Delta\Omega_z + \sqrt{2D}\xi_{air}(t) + \xi_g, \tag{3.63}$$

$$\epsilon \equiv -\beta + \left.\frac{\partial\langle K_g\rangle}{\partial\Omega_z}\right|_{\Delta\Omega_z=0}, \tag{3.64}$$

と書き換えることができる。ここで ϵ は図 3.2 における定常解周りでの $f(\Omega_z)$ の傾きに相当し、安定解に対して $\epsilon > 0$ となる。ϵ は定常解への復元力を表しており、ϵ が大きくなると回転速度のゆらぎ $\Delta\Omega_z$ は抑制される。一方、分岐に近づくと ϵ は小さくなり、回転速度のゆらぎ $\Delta\Omega_z$ は大きくなる。

以下では、微粒子の回転速度は安定な定常解に落ち着いていると考え、$\epsilon > 0$ とする。フーリエ変換

$$\Delta\Omega_z(t) = \int\frac{d\lambda}{2\pi}\Delta\Omega_{z,\lambda}e^{i\lambda t}, \tag{3.65}$$

により、式 (3.63) は

$$\Delta\Omega_{z,\lambda} = \frac{1}{i\lambda I + \epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[\xi_g(t) + \sqrt{2D}\xi(t)\right]e^{-i\lambda t}, \tag{3.66}$$

と書き換えられる。これより

$$\begin{aligned}&\langle\Delta\Omega_{z,\lambda}\Delta\Omega^*_{z,\lambda'}\rangle\\ &= \frac{1}{i\lambda I+\epsilon}\frac{1}{-i\lambda' I+\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,\left[\langle\xi_g(t)\xi_g(t')\rangle + 2D\delta(t-t')\right]e^{-i\lambda t+i\lambda' t'},\end{aligned} \tag{3.67}$$

となる (途中で式 (3.58) を用いた)。この式の右辺の積分の第一項は、式 (3.54) で与えられるトルクの揺らぎ $\xi_g(t)$ の時間相関を用いて

$$\begin{aligned}&\int dt\int dt'\langle\xi_g(t)\xi_g(t')\rangle e^{-i\lambda t}e^{i\lambda' t'}\\ &= \hbar^2\Gamma\frac{4{S_0^{\mathrm{tot}}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\mathrm{tot}}}{(1+|\tau_1|^2)^2}2\pi\delta(\lambda-\lambda')\\ &\quad + 2\pi\frac{\hbar^2 C}{2}\delta(\lambda-\lambda')\left(\frac{-2\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle}{(\lambda+(\omega-\omega_0)-2\Omega\,\mathrm{Re}(\tau_1))^2+(\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle)^2}\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \frac{-2\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle}{(\lambda-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,\mathrm{Re}(\tau_1))^2+(\Gamma\langle S_z^{\mathrm{tot}}\rangle)^2}\right),\end{aligned} \tag{3.68}$$

となる。ここで、

$$C = 16\Gamma^2 \frac{{S_0^{\rm tot}}^3 |\tau_1|^2 (1-|\tau_1|^2)}{(1+|\tau_1|^2)^4}, \tag{3.69}$$

とした。以上より式 (3.67) は、

$$\begin{aligned}\langle \Delta\Omega_{z,\lambda} \Delta\Omega^*_{z,\lambda'} \rangle = \frac{2\pi\delta(\lambda-\lambda')}{(i\lambda I+\epsilon)(-i\lambda' I+\epsilon)} \Bigg[\hbar^2\Gamma \frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau_1|^2)^2} + 2D \\ - \Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle \hbar^2 C \Bigg(\frac{1}{(\lambda+(\omega-\omega_0)-2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1))^2 + (\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle)^2} \\ + \frac{1}{(\lambda-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1))^2 + (\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle)^2} \Bigg) \Bigg],\end{aligned} \tag{3.70}$$

となる。これを逆フーリエ変換することで $\langle \Delta\Omega_z(t)\Delta\Omega_z(t')\rangle$ が得られ、さらにそれを時間積分することで回転速度のノイズパワーは

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ift} \left[\langle \Delta\Omega_z(t)\Delta\Omega_z(0)\rangle + \langle \Delta\Omega_z(0)\Delta\Omega_z(t)\rangle \right] \\ &= \frac{2}{f^2 I^2 + \epsilon^2} \left[\hbar^2\Gamma \frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau_1|^2)^2} + 2D \right] \\ &\quad - \frac{2\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle \hbar^2 C}{f^2 I^2 + \epsilon^2} \Bigg(\frac{1}{(f+(\omega-\omega_0)-2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1))^2 + (\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle)^2} \\ &\qquad + \frac{1}{(f-(\omega-\omega_0)+2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1))^2 + (\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle)^2} \Bigg), \end{aligned} \tag{3.71}$$

と計算される。さらに、ゼロ周波数極限のノイズは、式 (3.59), (3.69) も用いて

$$S \equiv \lim_{f\to 0} S(f) = \frac{2}{\epsilon^2}(S_1 + S_2 + S_3), \tag{3.72}$$

$$S_1 = 2\beta k_B T, \tag{3.73}$$

$$S_2 = \hbar^2\Gamma \frac{4{S_0^{\rm tot}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\rm tot}}{(1+|\tau_1|^2)^2}, \tag{3.74}$$

$$S_3 = -32\hbar^2\Gamma^3 \frac{{S_0^{\rm tot}}^4|\tau_1|^2(1-|\tau_1|^2)^2}{(1+|\tau_1|^2)^5} \frac{1}{(\omega-\omega_0-2\Omega\,{\rm Re}(\tau_1))^2 + (\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle)^2}, \tag{3.75}$$

となる。ここで S_1 は空気抵抗による熱ノイズ、S_2, S_3 はギルバート減衰による非平衡ノイズをそれぞれ表す。後者のうち、S_2 は同時刻相関に由来する非平衡ショットノイズに由来し、S_3 はギルバート減衰を観測したバックアクションに起因した項となっている。

3.8　回転速度ノイズの見積もり

本節では、式 (3.72)-(3.75) の結果を用いて、回転速度ノイズのゼロ振動数成分 S を数値的に評価する。

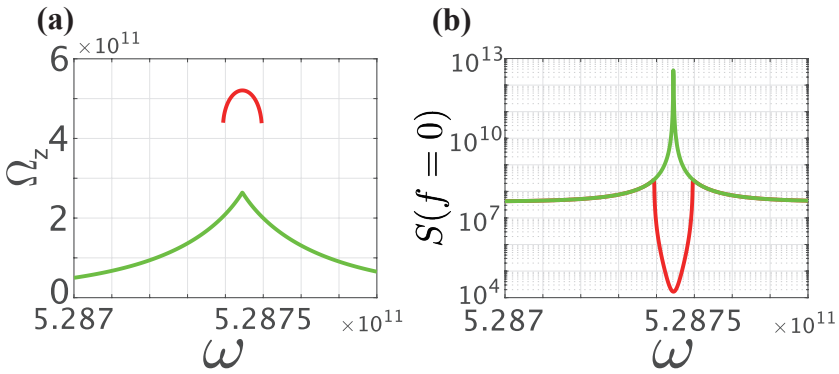

図 3.4　(a) $p = p_1$, $h = 10\,\mathrm{A/m}$ のときの定常状態の回転速度。ここでは第 2 章と異なり、不安定解を取り除いており、赤線も緑線も共に安定解である。(b) (a) に対応するトータルのゼロ周波数ノイズ $S(f=0)$ の片対数グラフ。赤線・緑線は (a) のそれぞれの線に対応している。

3.8.1　実験パラメータ

z 軸方向の静磁場の大きさ、および、温度は

$$H_0 = 2.6 \times 10^6\,\mathrm{A/m},\ T = 3\,\mathrm{K} \tag{3.76}$$

とする。ここで、静磁場の大きさ H_0 は、以下で議論するショットノイズの寄与を見やすくするため、第 2 章よりも一桁大きい値を用いている。また試料のパラメータは、第 2 章と同じ ($m_{\mathrm{air}} = 28.8 \times 10^{-3}/6.02 \times 10^{23}$ kg, $M = 1.557 \times 10^5$ A/m, $\alpha = 6.7 \times 10^{-5}$ [43], $r = 1 \times 10^{-6}$ m) にとる。前章と同様に分子流領域を考え、空気抵抗の係数 β は式 (2.24) で与えられるとする。

3.8.2　回転速度ノイズ

図 3.4 (a) に $h = 10\,\mathrm{A/m}$, $p = p_1$ での回転速度の平均値を、マイクロ波周波数の関数として示す[*9]。このパラメータでは最大 2 個の安定解が存在する。回転速度の速い分岐を赤の実線で、回転速度の遅い分岐を緑の実線でそれぞれ表す。図 3.4 (b) に同じパラメータに対する回転速度のノイズパワー S を片対数グラフで示す。グラフの色は図 3.4 (a) における 2 つの安定解の色と対応している。回転速度の遅い分岐 (緑の実線) に対して、回転速度のゆらぎが共鳴周波数付近で非常に大きくなることがみてとれる。これは、系が分岐に近づくことで、安定解に戻ろうとする復元力 (式 (3.63) の第一項) が弱くなるためである (図 3.4(a) も参照)。この結果は実験的には、パラメータを分岐が生じるときの値付近にとっておくと回転速度ノイズを増幅することができ、その測定が容易になることを意味している。

[*9] 本章では定常解のうち安定解にのみ着目しているため、図 3.4 に不安定解は描かれていないことに注意。

3.8.3　回転速度ノイズの起源

式 (3.72)-(3.75) に示すように、回転速度のノイズパワーは 3 つの寄与 S_1, S_2, S_3 の和として与えられる[*10]。図 3.5 にそれぞれのノイズの寄与をマイクロ波周波数の関数として示す。図 3.5 (a) に示す空気抵抗によるノイズ S_1 は、マイクロ波周波数によらず一定の大きさとなっているのに対して、図 3.5 (b), (c) に示す S_2, S_3 の寄与はマイクロ波周波数に強く依存し、共鳴周波数付近で増大している。このパラメータに対して、S_2 は S_3 に比べて一桁ほど大きな値を取っており、ギルバート減衰由来の回転速度ノイズとして非平衡ショットノイズが支配的であるといえる。図 3.5 (a) と (b) の比較より、ショットノイズと空気抵抗による熱ノイズは同程度であることがわかる。回転速度の定常解は式 (3.72) より、

$$\langle \Omega_z \rangle = \frac{1}{\beta}\Gamma\hbar\langle S_+^{\mathrm{tot}} S_-^{\mathrm{tot}} \rangle = \frac{1}{\beta}\Gamma\hbar\frac{4{S_0^{\mathrm{tot}}}^2|\tau_1|^2 + 2S_0^{\mathrm{tot}}}{(1+|\tau_1|^2)^2} \tag{3.77}$$

と表されることを用いると、

$$S_1 + S_2 = \beta\left(2k_BT + \hbar\langle \Omega_z \rangle\right) \tag{3.78}$$

となることがわかる。よって、空気抵抗ノイズとギルバート減衰ノイズの比は、k_BT と $\hbar\langle \Omega_z \rangle$ の比から決定される。図 3.5 (a) は温度を $T = 3\,\mathrm{K}$ ととったときの熱ノイズであるが、温度を下げるか回転速度を上げることによってショットノイズの寄与を相対的に大きくすることができる[*11]。

3.8.4　ショットノイズ

ショットノイズによるトルクのゆらぎが回転速度のノイズに最も寄与するとき ($S_2 \gg S_1, S_3$ のとき)、ノイズの大きさは回転速度の平均値 $\langle \Omega_z \rangle$ を用いて、

$$S = \frac{2}{\epsilon^2}\beta\hbar\langle \Omega_z \rangle \tag{3.79}$$

と書き表される。そのため、ϵ や β を回転速度の測定から決定することができれば、回転速度ノイズの測定から $\hbar$ を決定できる可能性がある。この $\hbar$ はスピン系から格子系に渡される角運動量の単位を表しており、ショットノイズからこの量を決定することができれば、一回のスピン緩和過程で格子系に渡される角運動量の大きさを決定することができる。これはスピン緩和の詳細なメカニズムの解明に寄与すると期待される。[*12]

[*10] ここでは比較を簡単にするために、分岐の近くでの増大因子 $2/\epsilon^2$ を取り除いたものに注目する。式 (3.72)-(3.75) を参照。

[*11] 回転速度を上げるには、静磁場 (共鳴周波数) を大きくした上で、マイクロ波周波数も共鳴周波数程度まで大きくする必要がある。

[*12] このようにノイズから角運動量単位を決定する手法としては、強磁性絶縁体と金属界面でのスピン流ノイズを用いる方法が文献 [55] で理論的に議論されている。一方、実験的にはまだ調べられていない。

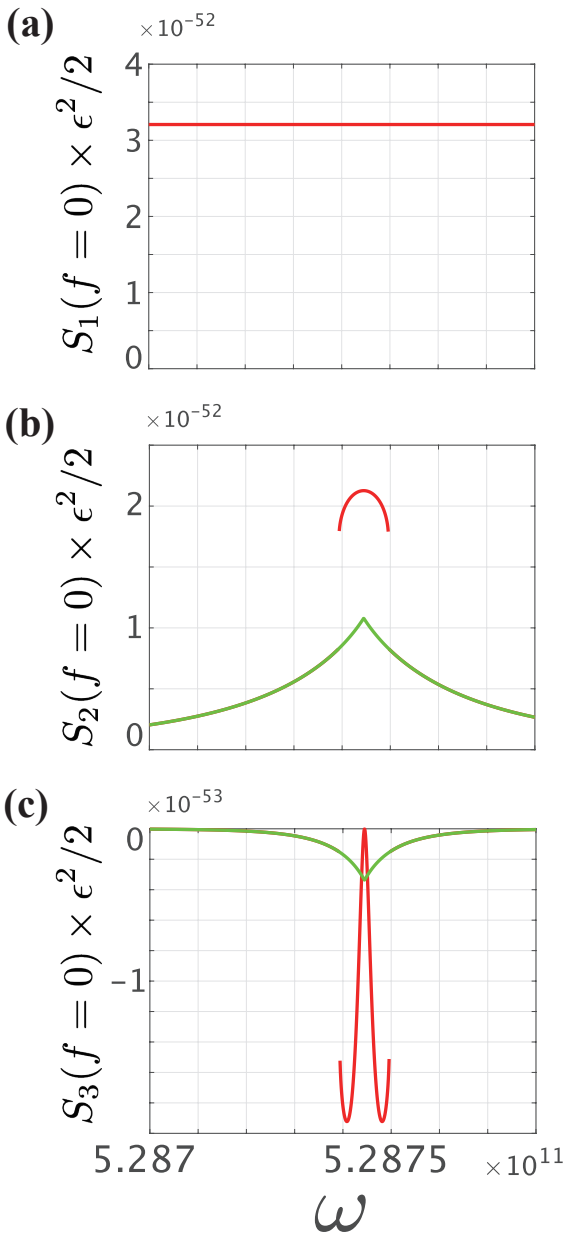

図 3.5　図 3.4 と同じ状況での、それぞれのゼロ周波数ノイズ。見やすくするため、分岐の影響を取り除き、縦軸は $S(f=0)\times\epsilon^2/2$ としている。(a) は熱ノイズ $S_1(f=0)$、(b) は $S_2(f=0)$、(c) は $S_3(f=0)$ を表している。赤線・緑線は図 3.4 と同様に対応してある。(a), (b) は $\times 10^{-52}$ であるのに対し、(c) は $\times 10^{-53}$ であることに注意。

3.9　本章のまとめ

本章では、我々の提案しているセットアップでの浮上させた微粒子の回転速度ノイズを考察した。その際、ギルバート減衰に由来する非平衡ノイズを計算する必要があるが、LLG 方程式のような古典的な手法ではそれを求められないため、新しく強磁性共鳴における非平衡量子開放系の理論を構築した。非平衡開放系における GKSL 方程式と LLG 方程式の対応関係を明らかにし、フォッカー-プランク方程式を導出することで非平衡ノイズを定式化することができた。さらに回転速度に関するランジュバン方程式を用いて、微粒子の回転速度のノイズパワーを求めた。

具体的な実験パラメータを仮定して回転速度ノイズの評価も行った。予想された通り、回転速度のグラフの分岐付近において、回転速度ノイズが増大することが確認できた。また、強い静磁場 ($H_0 = 2.6 \times 10^6\,\mathrm{A/m}$) かつ低温 ($T = 3\,\mathrm{K}$) にすれば、共鳴周波数付近において、ギルバート減衰ノイズが空気抵抗による熱ノイズに匹敵する大きさになることがわかった。さらに回転速度の大きさと回転速度ノイズの比から、スピン系から格子系に渡される角運動量の単位を決定できることも明らかにした。以上のことから、浮上させた微粒子の回転速度ノイズ測定は、スピン緩和の微視的メカニズムに関する情報を得る新たな実験手法となることが期待される。

第 4 章

まとめ

本論文では、光浮遊技術を用いて浮かせた強磁性微粒子に対して、強磁性共鳴と磁気回転結合の組み合わせによって回転運動を駆動させた場合の微粒子回転について理論的に考察した。光浮遊技術によって強磁性体を浮かせると、強磁性体を孤立系として扱うことができ、面内回転の抑制や空気抵抗の圧力制御も可能であることから、磁気回転効果の精密測定に適している。

第 2 章では微粒子の定常回転解を、LLG 方程式とオイラー方程式から求めた。その結果、マイクロ波周波数が共鳴周波数に近いとき、回転速度が非常に速くなり、特定の条件下では安定解の個数が変化する分岐現象も生じることが明らかになった。この分岐現象は、微粒子の高速回転によって、アインシュタイン-ド=ハース効果とバーネット効果の 2 つの磁気回転効果が共存することによって現れる。さらに、固体中のスピン軌道相互作用により磁気回転結合の g 因子が 1 からずれた場合、そのずれを微粒子の回転速度の測定から精密に測定できることも明らかにした。

第 3 章では、微粒子の回転速度のゆらぎ (ノイズパワー) を考察した。磁気共鳴を記述する非平衡量子開放系の理論を構築し、スピン緩和によって生じる微粒子へのトルクのゆらぎを定式化した。さらに回転速度のノイズパワーを計算した。その結果、定常解に分岐が生じるパラメータ付近で回転速度ノイズが増大することがわかった。また低温・高磁場の環境では、ギルバート減衰に由来する非平衡ショットノイズが空気抵抗による熱ノイズと同程度になることもわかった。さらに、非平衡ショットノイズの測定からは、一回のスピン緩和過程における角運動量移行量の大きさを決定できることも示した。

このように我々が提案した物理系において、微粒子の回転速度の測定から固体中の磁気回転効果や強磁性体の磁化緩和の微視的機構についての情報が得られることがわかった。本提案は、光浮遊技術とスピントロニクス分野の研究を結びつける新しい研究分野の創出に寄与するものと期待している。

付録 A

分子流領域での空気抵抗トルク

本付録では文献 [39, 56] に従って、微粒子に加わる空気抵抗によるトルクの式 (2.24) を導出する。ここでは微粒子の球の半径が平均自由行程よりも十分小さくなるような圧力領域 (**分子流領域**) を考える。気体分子の平均自由行程 λ は、分子密度 n と分子の直径 ξ を用いて [56]

$$\lambda = \frac{1}{\pi n \xi^2} \frac{v}{v_r}, \tag{A.1}$$

と書かれる。v は分子の絶対速度、v_r は分子の相対速度であり、クラウジウスにより $v/v_r = 3/4$ となることが示されている。これとマクスウェル-ボルツマン分布を利用すると

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi \xi^2 p} \simeq 3.11 \times 10^{-24} \frac{T}{\xi^2 p}\,[\mathrm{m}], \tag{A.2}$$

となる。ここで p は圧力 (Pa)、T は絶対温度 (K) である。文献 [56] の Fig. 2.9 より空気分子の直径は $\xi = 3.76 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ と見積もられるので、$T = 273\,\mathrm{K}$ のとき

$$\lambda \simeq 6.0 \times 10^{-3}/p\,[\mathrm{m}], \tag{A.3}$$

となる。いくつかの典型的な圧力に対する平均自由行程は表 A.1 の通りである。我々のセットアップで用いた半径 $r = 1\,\mu\mathrm{m}$ の微粒子に対して、$p \leq 100\,\mathrm{Pa}$ であれば $r \ll \lambda$ が成り立ち、分子流領域にあるといえる。

分子流領域では、球状の微粒子に当たった空気分子がすべて、衝突後にあらゆる方向に同確率で散乱する (diffuse reflection) と考える。このとき z 軸周りの空気抵抗トルク K_z は、

$$K_z = -\frac{2\pi r^4 \Omega_z}{3} \rho \bar{v}, \tag{A.4}$$

と計算される (文献 [57] で $s = 1$ の場合に相当)。再びマクスウェル-ボルツマン分布を仮定すると、

$$\rho = n m_{\mathrm{air}} = m_{\mathrm{air}} \frac{p}{k_B T}, \qquad \bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2 k_B T}{m_{\mathrm{air}}}}, \tag{A.5}$$

p(Pa)	平均自由行程 λ(m)
10^{-3}	6
10^{-2}	0.6 (60 cm)
0.1	0.06 (6 cm)
1	0.006 (6 mm)
10	6×10^{-4} (0.6 mm)
100	6×10^{-3} (6 mm)

表 A.1　平均自由行程の圧力依存性

を得る。ここで m_{air} は空気分子の質量、n は体積あたりの分子数である。以上より、結局 z 軸周りの空気抵抗のトルクは

$$K_z = -\frac{8\sqrt{\pi}r^4}{3}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{air}}}{2k_BT}}\Omega_z p \tag{A.6}$$

と計算され、式 (2.24) が導出される。

付録 B

磁気回転結合の g 因子の変調

微粒子中の磁気回転結合は、ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SR}} = -\hbar g_{\mathrm{SR}} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{B.1}$$

によって記述できる。真空中では係数 g_{SR} は常に 1 となるが、固体中ではスピン軌道相互作用の影響により 1 からずれてもよい。この付録ではその一例として、$3d$ 遷移金属の局在電子に対する g 因子の変調について簡単にまとめる [58]。

$3d$ 遷移金属の局在電子のハミルトニアンは一般に結晶場とスピン軌道相互作用によって

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{intra}} + \mathcal{H}_{\mathrm{cry}} + \mathcal{H}_{\mathrm{SO}} + \mathcal{H}_{\mathrm{Z}} + \mathcal{H}_{\mathrm{SR}}, \tag{B.2}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SO}} = \lambda \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}, \tag{B.3}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Z}} = \mu_B \boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{L} + 2\boldsymbol{S}), \tag{B.4}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SR}} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}), \tag{B.5}$$

と記述される。$\mathcal{H}_{\mathrm{intra}}$ と $\mathcal{H}_{\mathrm{cry}}$ はそれぞれ原子内のクーロン相互作用と結晶場の相互作用を表す。また、$\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}, \mathcal{H}_{\mathrm{Z}}, \mathcal{H}_{\mathrm{SR}}$ はそれぞれスピン軌道相互作用、ゼーマン相互作用、磁気回転結合を表す。$3d$ 遷移金属では $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{\mathrm{intra}} + \mathcal{H}_{\mathrm{cry}}$ を無摂動ハミルトニアンとして、$\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}, \mathcal{H}_{\mathrm{Z}}, \mathcal{H}_{\mathrm{SR}}$ を摂動として取り扱うことができる。$\mathcal{H}_0$ の基底状態は縮退していないとして、$|G, M_s\rangle$ と表すことにする。ここで M_s はスピン量子数である。$\mathcal{H}_0$ はスピンと軌道を混ぜないので、この固有関数は軌道状態とスピン状態の直積の形 ($|G, M_s\rangle = |G\rangle\,|M_s\rangle$) で書くことができる。摂動論を用いると、一次補正 $E^{(1)}$、および、二次補正 $E^{(2)}$ は

$$E^{(1)} = 2\mu_B \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{S}, \tag{B.6}$$

$$E^{(2)} = -\sum_{i \neq G} \frac{\left|\langle G|\, \boldsymbol{L} \cdot (\lambda \boldsymbol{S} + \mu_B \boldsymbol{H} + \boldsymbol{\Omega})\, |i\rangle\right|^2}{E_i^{(0)} - E_G^{(0)}} \tag{B.7}$$

となる。ここで $\langle G|\boldsymbol{L}|G\rangle = 0$ を用いた。さらに、

$$\Lambda_{\mu\nu} = \sum_{i \neq G} \frac{\langle G|L_\mu|i\rangle\langle i|L_\nu|G\rangle}{E_i^{(0)} - E_G^{(0)}}, \tag{B.8}$$

と定義すると、エネルギーの補正は

$$E^{(2)} = -\Lambda_{\mu\nu}\left[\lambda^2 S_\mu S_\nu + (\mu_B H_\mu + \Omega_\mu)(\mu_B H_\nu + \Omega_\nu) + 2\lambda S_\mu(\mu_B H_\nu + \Omega_\nu)\right] \tag{B.9}$$

となる。ここでアインシュタインの縮約を用いた。以上より、二次摂動までの有効ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{eff}} &= H_0 + g^Z_{\mu\nu}\mu_B H_\mu S_\nu + g^{\mathrm{SR}}_{\mu\nu}\Omega_\mu S_\nu - \lambda^2\Lambda_{\mu\nu}S_\mu S_\nu \\ &\quad - \Lambda_{\mu\nu}(\mu_B H_\mu + \Omega_\mu)(\mu_B H_\nu + \Omega_\nu), \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$g^Z_{\mu\nu} = 2\delta_{\mu\nu} - 2\lambda\Lambda_{\mu\nu}, \tag{B.11}$$

$$g^{\mathrm{SR}}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2\lambda\Lambda_{\mu\nu}. \tag{B.12}$$

となる。$g^Z_{\mu\nu}$ と $g^{\mathrm{SR}}_{\mu\nu}$ はそれぞれゼーマン相互作用と磁気回転結合の g 因子テンソルを表しており、上述の結果はゼーマン相互作用の g 因子だけでなく、磁気回転結合の g 因子も変化することを意味する。一般に $\Lambda_{\mu\nu}$ は主軸を適切に取ることで対角化される。例えば、結晶場が立方対称のとき、$\Lambda_{\mu\nu}$ は

$$\Lambda_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu \neq \nu), \qquad \Lambda_{xx} = \Lambda_{yy} = \Lambda_{zz}. \tag{B.13}$$

となり、g 因子は等方的になる。本研究では簡単のため、g 因子の変調を等方的なものとして扱った。

付録 C

ギルバート減衰定数に対する依存性

この付録では、第 2 章で議論した定常状態の回転速度について、ギルバート減衰定数の影響を詳しく述べる。

図 C.1 はそれぞれのギルバート減衰定数 α に対して、回転速度 Ω_z をマイクロ波周波数 ω の関数としてプロットしたものである。パラメータは $g_{\mathrm{SR}} = 1$, 圧力 $p = 5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa}$, マイクロ波振幅 $h = 4\,\mathrm{A/m}$ としている。ギルバート減衰定数が大きくなると、グラフは図 C.1 (a) から (c) のように変化していく。このとき、まず分岐が生じ、その後高速回転側の分枝が離れていく。さらにギルバート減衰定数が大きくなると、図 C.1 (d) のように、上の分枝が消滅し、一つの安定解のみが実現するようになる。式 (2.37) からも示唆されるように、ギルバート減衰定数の増大の影響はマイクロ波振幅 h の減少と類似の効果があるといえる。

次に圧力、マイクロ波振幅を同じ値に保ったまま、$g_{\mathrm{SR}} = 1.001$ としたときの回転速度のグラフを図 C.2 に示す。すべてのグラフにおいて、共鳴ピークは図 2.5 と同様に低周波数側に傾く。ギルバート減衰定数 α が小さい場合は、図 C.2 (a) から (c) のように 2 つの安定解と 1 つの不安定解が共存している。(c) では空気の圧力が分岐が生じる p_1 より小さくなっており、上側の分枝が離れていく。さらにギルバート減衰定数 α を大きくしていくと、(d) のように上側の分枝は消え、1 つの安定解のみが実現する。このとき共鳴ピークは対称な形になるが、これは分岐が生じる周波数領域の幅に比べて、ギルバート減衰による共鳴ピークの幅が大きくなるためである[*1]。

本文では、我々は強磁性体を YIG(Yttrium Iron Garnet) であると仮定し、ギルバート減衰定数として $\alpha = 6.7 \times 10^{-5}$ を採用した。ただし、磁性体の材質や作成方法を変更することで、α は大きくなりうる。その場合は、図 C.2 (d) に示したように共鳴ピークの非対称性は抑えられ、$g_{\mathrm{SR}} - 1$ の精密測定はしにくくなる。しかしその場合でも、マイクロ波振幅 h を大きくすることで非対称な共鳴ピークを回復させることができる。

[*1] ちなみに、仮に圧力 p がもっと小さい状況を考える場合、(d) のように上側の分枝が消えることはなく、どんなに大きな α に対しても 2 つの離れた分枝が存在することになる。これは、図 2.4 における D_2 が $\sim 4.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa}$ に漸近するためである。

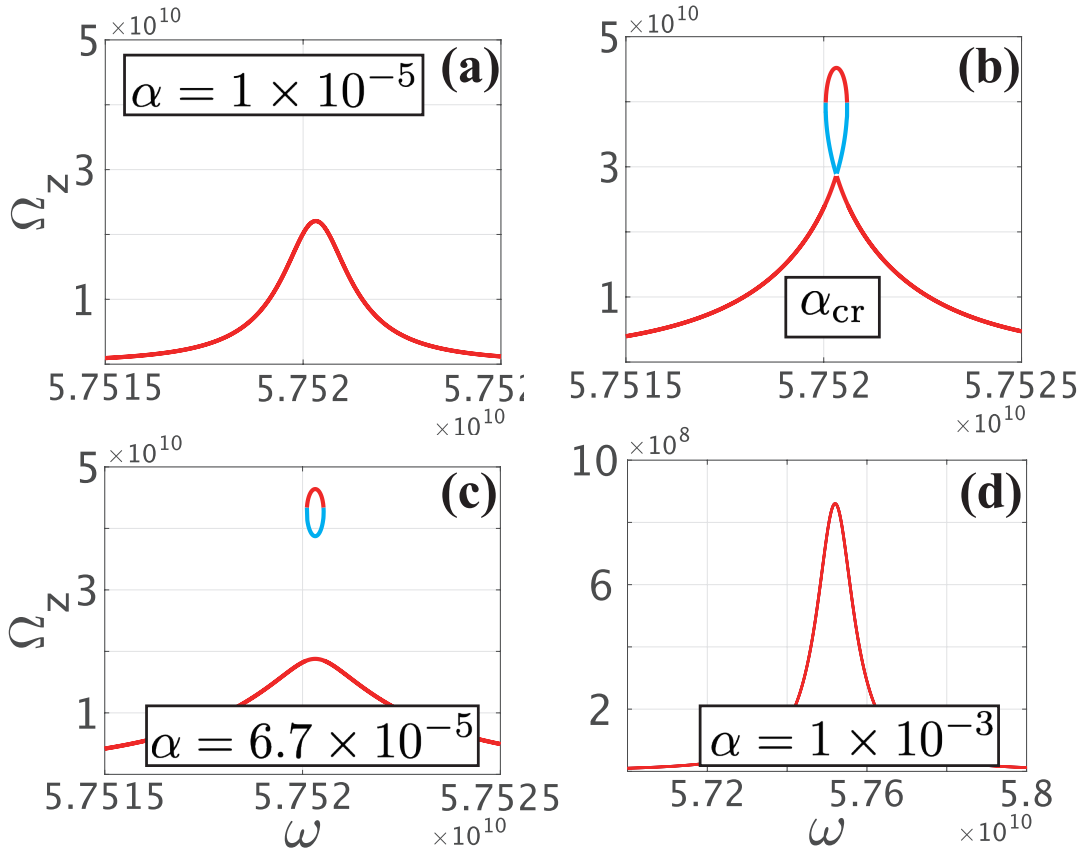

図 C.1　それぞれのギルバート減衰定数 α に対して、$g_{\rm SR} = 1$、$p = 5.0 \times 10^{-3}$ Pa、$h = 4$ A/m としたときの回転速度 Ω_z の定常解をマイクロ波周波数 ω の関数としてプロットした図。式 (2.38) で圧力 p を固定し、α を変数とした式から、分枝が生じるギルバート減衰定数 $\alpha_{\rm cr}$ は、$\alpha_{\rm cr} = -\frac{2M}{\gamma p r}\sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m_{\rm air}}}\left(\frac{h}{H_0}\right)^2 \simeq 5.89 \times 10^{-5}$ と求まる。

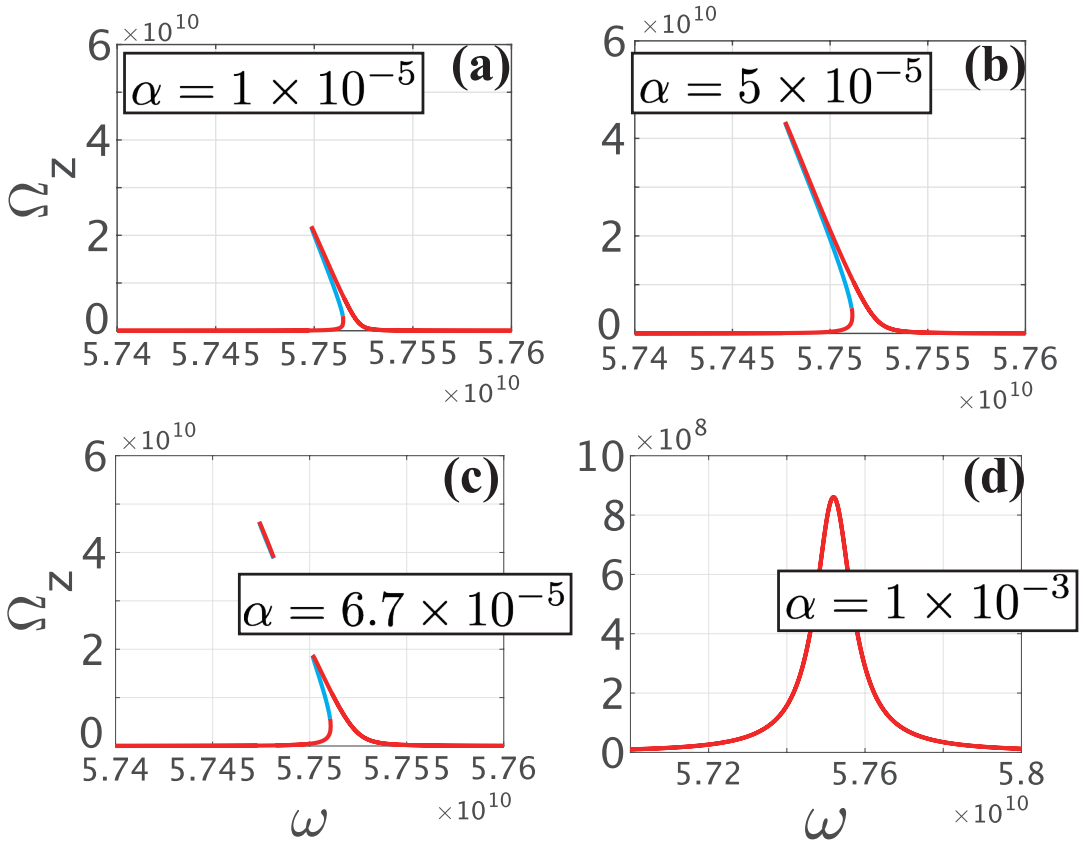

図 C.2　それぞれのギルバート減衰定数 α に対して、$g_{\mathrm{SR}} = 1.001$、$p = 5.0 \times 10^{-3}$ Pa、$h = 4$ A/m としたときの回転速度 Ω_z の定常解をマイクロ波周波数 ω の関数としてプロットした図。式 (2.38) より $\alpha_{\mathrm{cr}} \simeq 5.89 \times 10^{-5}$。

付録 D

定常解の決定

第 3 章において、GKSL 方程式からフォッカー-プランク方程式を導き、さらにスピンの絶対値 S_0^{tot} が十分に大きい極限での定常解を求め、系の密度行列が

$$\rho_s = \left|\tau_1 e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right\rangle \left\langle \tau_1 e^{i(\omega-\Omega_z)t}\right|, \tag{D.1}$$

と書けることを示した。ここで τ_1 は、二次方程式

$$\Omega\tau^2 - [(\omega-\omega_0) + \Gamma S_0^{\mathrm{tot}} i]\tau - \Omega = 0, \tag{D.2}$$

を解くことで定まる。この方程式の解は 2 つあり、

$$\begin{aligned}\tau_1^{\pm} \equiv \frac{1}{2\Omega}\Big[&(\omega-\omega_0) + i\Gamma S_0^{\mathrm{tot}} \\ &\pm e^{i\theta_1/2}\left\{\left[(\omega-\omega_0)^2 + 4\Omega^2 - (\Gamma S_0^{\mathrm{tot}})^2\right]^2 + 4(\Gamma S_0^{\mathrm{tot}})^2(\omega-\omega_0)^2\right\}^{1/4}\Big],\end{aligned} \tag{D.3}$$

で与えられる。ここで位相因子 θ_1 は

$$e^{i\theta_1} \equiv \frac{\left[(\omega-\omega_0) + \Gamma S_0^{\mathrm{tot}} i\right]^2 + 4\Omega^2}{\sqrt{\left[(\omega-\omega_0)^2 + 4\Omega^2 - (\Gamma S_0^{\mathrm{tot}})^2\right]^2 + 4(\Gamma S_0^{\mathrm{tot}})^2(\omega-\omega_0)^2}}, \tag{D.4}$$

を満たす実数 $(0 \le \theta_1 < 2\pi)$ である。τ_1^+ が $S_z < 0$ に対応することを理由に、本研究では解 τ_1^+ のみを採用した。この付録では、実際に τ_1^+ が $S_z < 0$ の解に、τ_1^- が $S_z > 0$ の解に、それぞれ対応することを確かめる。

系の密度行列が式 (D.1) で与えられるとき、$\tau_1 = \tau_1^{\pm}$ に対してスピンの z 成分の期待

値は

$$
\begin{aligned}
\langle S_z^{\rm tot}\rangle &= S_0^{\rm tot}\frac{1-|\tau_1^{\pm}|^2}{1+|\tau_1^{\pm}|^2} = S_0^{\rm tot}\frac{\Gamma S_0^{\rm tot}(1+|\tau_1^{\pm}|^2-2|\tau_1^{\pm}|^2)}{\Gamma S_0^{\rm tot}\left(1+|\tau_1^{\pm}|^2\right)} \\
&= S_0^{\rm tot}\frac{\Gamma S_0^{\rm tot}(1+|\tau_1^{\pm}|^2)+i\left[\tau_1^{\pm *}(\Omega\tau_1^{\pm 2}-(\omega-\omega_0)\tau_1^{\pm}-\Omega)-h.c.\right]}{\Gamma S_0^{\rm tot}\left(1+|\tau_1^{\pm}|^2\right)} \\
&= S_0^{\rm tot}\frac{\Gamma S_0^{\rm tot}(1+|\tau_1^{\pm}|^2)+i(\Omega|\tau_1^{\pm}|^2(\tau_1^{\pm}-\tau_1^{\pm *})-\Omega(\tau_1^{\pm *}-\tau_1^{\pm}))}{\Gamma S_0^{\rm tot}\left(1+|\tau_1^{\pm}|^2\right)} \\
&= S_0^{\rm tot}\frac{\Gamma S_0^{\rm tot}(1+|\tau_1^{\pm}|^2)-2\Omega(1+|\tau_1^{\pm}|^2)\,{\rm Im}\,\tau_1^{\pm}}{\Gamma S_0^{\rm tot}\left(1+|\tau_1^{\pm}|^2\right)} = S_0^{\rm tot}\frac{\Gamma S_0^{\rm tot}-2\Omega\,{\rm Im}\,\tau_1^{\pm}}{\Gamma S_0^{\rm tot}} \\
&= S_0^{\rm tot}\frac{\mp\sin\frac{\theta_1}{2}\left\{\left[(\omega-\omega_0)^2+4\Omega^2-(\Gamma S_0^{\rm tot})^2\right]^2+4(\Gamma S_0^{\rm tot})^2(\omega-\omega_0)^2\right\}^{1/4}}{\Gamma S_0^{\rm tot}} \\
&= \mp\frac{S_0^{\rm tot}}{\sqrt{2}\Gamma S_0^{\rm tot}}\left\{(1-\cos\theta_1)\sqrt{\left[4\Omega^2+(\omega-\omega_0)^2-\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}\right]^2+4\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}(\omega-\omega_0)^2}\right\}^{1/2} \\
&= \mp\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma}\left\{-4\Omega^2-(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}\right. \\
&\qquad \left.+\sqrt{\left[4\Omega^2+(\omega-\omega_0)^2-\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}\right]^2+4\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}(\omega-\omega_0)^2}\right\}^{1/2} \qquad \text{(D.5)}
\end{aligned}
$$

と計算される[*1]。

一方、第 2 章の式 (2.11) を参照すると、LLG 方程式の定常解におけるスピンの z 成分の期待値は

$$
\begin{aligned}
S_z^{\rm tot} &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma}\left\{-4\Omega^2-(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}\right. \qquad \text{(D.6)} \\
&\qquad \left.+\sqrt{\left[4\Omega^2+(\omega-\omega_0)^2-\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}\right]^2+4\Gamma^2 S_0^{{\rm tot}^2}(\omega-\omega_0)^2}\right\}^{1/2} \\
&= S_0^{\rm tot}\frac{1-|\tau_1^{\mp}|^2}{1+|\tau_1^{\mp}|^2}
\end{aligned}
$$

となる。よって、τ_1^+ と τ_1^- は、それぞれ $S_z^{\rm tot}<0$ と $S_z^{\rm tot}>0$ に対応することがわかった。

以上より、フォッカー-プランク方程式の定常解から導いた $S_z^{\rm tot}$ の期待値は、確かに LLG 方程式の結果を再現することがわかり、さらに τ_1^+ と τ_1^- は、それぞれ $S_z^{\rm tot}<0$ と $S_z^{\rm tot}>0$ に対応することが確かめられた。

[*1] 式変形の途中で式 (D.2), (D.3) を用いた。また、$0\le\frac{\theta_1}{2}<\pi$ より $\sin\frac{\theta_1}{2}>0$ であることを用いた。ちなみにこの 4 段目の式を見ると、本文中でも用いたように $\Gamma S_0^{\rm tot}-2\Omega\,{\rm Im}(\tau_1^{\pm})=\Gamma\langle S_z^{\rm tot}\rangle$ となっていることがわかる。

謝辞

本研究を行う上で, 指導教官である加藤岳生准教授には大変熱心にご指導いただきました。また、本研究では、共同研究者として、中国科学院大学カブリ理論研究所の松尾衛准教授、リスボン大学の大上能悟さんにご協力いただきました。皆様、私の至らない部分にも辛抱強く、そして熱心にご指導いただきました。心から感謝申し上げます。

研究室の皆様や、友人・家族には、修士生活を送る上で様々な形でご協力いただきました。本当にありがとうございました。

参考文献

[1] Igor Žutić, Jaroslav Fabian, and S. Das Sarma. Spintronics: Fundamentals and applications. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 76, pp. 323–410, Apr 2004.

[2] SD Bader and SSP Parkin. Spintronics. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, Vol. 1, No. 1, pp. 71–88, 2010.

[3] 多々良源. スピントロニクスの物理ー場の理論の立場から. 内田老鶴圃, 2019.

[4] Sadamichi Maekawa, Sergio O Valenzuela, Eiji Saitoh, and Takashi Kimura. *Spin current*, Vol. 22. Oxford University Press, 2017.

[5] 前川禎通, 堤康雄. シリーズ 21 世紀の物性　スピントロニクス. 日本評論社, 2019.

[6] Mamoru Matsuo, Eiji Saitoh, and Sadamichi Maekawa. Spin-mechatronics. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 86, No. 1, p. 011011, 2017.

[7] E Saitoh, M Ueda, H Miyajima, and G Tatara. Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-hall effect. *Applied physics letters*, Vol. 88, No. 18, p. 182509, 2006.

[8] Y Kajiwara, K Harii, S Takahashi, Jun-ichiro Ohe, K Uchida, M Mizuguchi, H Umezawa, H Kawai, Kazuya Ando, K Takanashi, et al. Transmission of electrical signals by spin-wave interconversion in a magnetic insulator. *Nature*, Vol. 464, No. 7286, pp. 262–266, 2010.

[9] Kishan Dholakia, Michael Macdonald, and Gabriel Spalding. Optical tweezers: the next generation. *Physics world*, Vol. 15, No. 10, p. 31, 2002.

[10] Arthur Ashkin, James M Dziedzic, JE Bjorkholm, and Steven Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*, Vol. 11, No. 5, pp. 288–290, 1986.

[11] Jeffrey R Moffitt, Yann R Chemla, Steven B Smith, and Carlos Bustamante. Recent advances in optical tweezers. *Annu. Rev. Biochem.*, Vol. 77, pp. 205–228, 2008.

[12] S. J. Barnett. Magnetization by rotation. *Phys. Rev.*, Vol. 6, p. 239, 1915.

[13] A. Einstein and W. J. de Haas. Experimental proof of the existence of ampère's molecular currents. *KNAW proc.*, Vol. 18 I, p. 696, 1915.

[14] Masaki Imai, Yudai Ogata, Hiroyuki Chudo, Masao Ono, Kazuya Harii, Mamoru

Matsuo, Yuichi Ohnuma, Sadamichi Maekawa, and Eiji Saitoh. Observation of gyromagnetic reversal. *Applied Physics Letters*, Vol. 113, No. 5, p. 052402, 2018.

[15] Masaki Imai, Hiroyuki Chudo, Masao Ono, Kazuya Harii, Mamoru Matsuo, Yuichi Ohnuma, Sadamichi Maekawa, and Eiji Saitoh. Angular momentum compensation manipulation to room temperature of the ferrimagnet ho3- x dy x fe5o12 detected by the barnett effect. *Applied Physics Letters*, Vol. 114, No. 16, p. 162402, 2019.

[16] M. Matsuo, J. Ieda, E. Saitoh, and S. Maekawa. Effects of mechanical rotation on spin currents. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 106, p. 076601, Feb 2011.

[17] Mamoru Matsuo, Jun'ichi Ieda, Kazuya Harii, Eiji Saitoh, and Sadamichi Maekawa. Mechanical generation of spin current by spin-rotation coupling. *Physical Review B*, Vol. 87, No. 18, p. 180402(R), 2013.

[18] Atsufumi Hirohata, Yuji Baba, Benedict A Murphy, Benny Ng, Yunqi Yao, Kazuki Nagao, and Jun-young Kim. Magneto-optical detection of spin accumulation under the influence of mechanical rotation. *Scientific reports*, Vol. 8, No. 1, pp. 1–8, 2018.

[19] D. Kobayashi, T. Yoshikawa, M. Matsuo, R. Iguchi, S. Maekawa, E. Saitoh, and Y. Nozaki. Spin current generation using a surface acoustic wave generated via spin-rotation coupling. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 077202, 2017.

[20] Yuki Kurimune, Mamoru Matsuo, Sadamichi Maekawa, and Yukio Nozaki. Highly nonlinear frequency-dependent spin-wave resonance excited via spin-vorticity coupling. *Physical Review B*, Vol. 102, No. 17, p. 174413, 2020.

[21] Shoma Tateno, Genki Okano, Mamoru Matsuo, and Yukio Nozaki. Electrical evaluation of the alternating spin current generated via spin-vorticity coupling. *Physical Review B*, Vol. 102, No. 10, p. 104406, 2020.

[22] G. Zolfagharkhani, A. Gaidarzhy, P. Degiovanni, S. Kettemann, P. Fulde, and P. Mohanty. Nanomechanical detection of itinerant electron spin flip. *Nat. Nanotechnol.*, Vol. 3, No. 12, pp. 720–723, 12 2008.

[23] Thomas M Wallis, John Moreland, and Pavel Kabos. Einstein–de Haas effect in a NiFe film deposited on a microcantilever. *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 89, No. 12, p. 122502, 2006.

[24] C. Dornes, Y. Acremann, M. Savoini, M. Kubli, M. J. Neugebauer, E. Abreu, L. Huber, G. Lantz, C. A. F. Vaz, H. Lemke, E. M. Bothschafter, M Porer, V. Esposito, L. Rettig, M. Buzzi, A. Alberca, Y. W. Windsor, P. Beaud, U. Staub, Diling Zhu, Sanghoon Song, J. M. Glownia, and S. L. Johnson. The ultrafast Einstein–de Haas effect. *Nature*, Vol. 565, No. 7738, pp. 209–212, 2019.

[25] Shoma Tateno, Yuki Kurimune, Mamoru Matsuo, Kazuto Yamanoi, and Yukio Nozaki. Einstein–de haas phase shifts in surface acoustic waves. *Physical Review*

B, Vol. 104, No. 2, p. L020404, 2021.

[26] P. Huillery, T. Delord, L. Nicolas, M. Van Den Bossche, M. Perdriat, and G. Hétet. Spin mechanics with levitating ferromagnetic particles. *Phys. Rev. B*, Vol. 101, p. 134415, Apr 2020.

[27] Stefan Kuhn, Alon Kosloff, Benjamin A. Stickler, Fernando Patolsky, Klaus Hornberger, Markus Arndt, and James Millen. Full rotational control of levitated silicon nanorods. *Optica*, Vol. 4, No. 3, pp. 356–360, Mar 2017.

[28] C. Gonzalez-Ballestero, M. Aspelmeyer, L. Novotny, R. Quidant, and O. Romero-Isart. Levitodynamics: Levitation and control of microscopic objects in vacuum. *Science*, Vol. 374, No. 6564, p. eabg3027, 2021.

[29] M. Perdriat, P. Huillery, C. Pellet-Mary, and G. Hétet. Angle locking of a levitating diamond using spin diamagnetism. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 128, p. 117203, Mar 2022.

[30] J Cīmurs and A Cēbers. Three-dimensional dynamics of a particle with a finite energy of magnetic anisotropy in a rotating magnetic field. *Physical Review E*, Vol. 88, No. 6, p. 062315, 2013.

[31] J Cīmurs and A Cēbers. Dynamics of anisotropic superparamagnetic particles in a precessing magnetic field. *Physical Review E*, Vol. 87, No. 6, p. 062318, 2013.

[32] Klaus D Usadel and Clemens Usadel. Dynamics of magnetic single domain particles embedded in a viscous liquid. *Journal of Applied Physics*, Vol. 118, No. 23, p. 234303, 2015.

[33] Klaus D Usadel. Dynamics of magnetic nanoparticles in a viscous fluid driven by rotating magnetic fields. *Physical Review B*, Vol. 95, No. 10, p. 104430, 2017.

[34] NA Usov and B Ya Liubimov. Dynamics of magnetic nanoparticle in a viscous liquid: Application to magnetic nanoparticle hyperthermia. *Journal of Applied Physics*, Vol. 112, No. 2, p. 023901, 2012.

[35] NA Usov and B Ya Liubimov. Magnetic nanoparticle motion in external magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 385, pp. 339–346, 2015.

[36] Hedyeh Keshtgar, Simon Streib, Akashdeep Kamra, Yaroslav M. Blanter, and Gerrit E. W. Bauer. Magnetomechanical coupling and ferromagnetic resonance in magnetic nanoparticles. *Phys. Rev. B*, Vol. 95, p. 134447, Apr 2017.

[37] TV Lyutyy, Oleksandr Mykolaiovych Hryshko, and M Yu Yakovenko. Uniform and nonuniform precession of a nanoparticle with finite anisotropy in a liquid: Opportunities and limitations for magnetic fluid hyperthermia. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 473, pp. 198–204, 2019.

[38] T. V. Lyutyy, S. I. Denisov, and P. Hänggi. Dissipation-induced rotation of suspended ferromagnetic nanoparticles. *Phys. Rev. B*, Vol. 100, p. 134403, Oct 2019.

[39] Jonghoon Ahn, Zhujing Xu, Jaehoon Bang, Yu-Hao Deng, Thai M. Hoang, Qinkai Han, Ren-Min Ma, and Tongcang Li. Optically levitated nanodumbbell torsion balance and ghz nanomechanical rotor. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 033603, Jul 2018.

[40] René Reimann, Michael Doderer, Erik Hebestreit, Rozenn Diehl, Martin Frimmer, Dominik Windey, Felix Tebbenjohanns, and Lukas Novotny. Ghz rotation of an optically trapped nanoparticle in vacuum. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 121, p. 033602, Jul 2018.

[41] Mamoru Matsuo, Jun'ichi Ieda, and Sadamichi Maekawa. Renormalization of spin-rotation coupling. *Phys. Rev. B*, Vol. 87, p. 115301, Mar 2013.

[42] Charles Kittel. On the theory of ferromagnetic resonance absorption. *Phys. Rev.*, Vol. 73, pp. 155–161, Jan 1948.

[43] Y. Kajiwara, K. Harii, S. Takahashi, J. Ohe, K. Uchida, M. Mizuguchi, H. Umezawa, H. Kawai, K. Ando, K. Takanashi, S. Maekawa, and E. Saitoh. Transmission of electrical signals by spin-wave interconversion in a magnetic insulator. *Nature*, Vol. 464, pp. 262–266, 2010.

[44] GG Scott. Review of gyromagnetic ratio experiments. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 34, No. 1, p. 102, 1962.

[45] Y Ogata, H Chudo, B Gu, N Kobayashi, M Ono, K Harii, M Matsuo, E Saitoh, and S Maekawa. Enhanced orbital magnetic moment in feco nanogranules observed by barnett effect. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 442, pp. 329–331, 2017.

[46] Y Ogata, H Chudo, M Ono, K Harii, M Matsuo, S Maekawa, and E Saitoh. Gyroscopic g factor of rare earth metals. *Applied Physics Letters*, Vol. 110, No. 7, p. 072409, 2017.

[47] Wei Liu, Dashan Dong, Hong Yang, Qihuang Gong, and Kebin Shi. Robust and high-speed rotation control in optical tweezers by using polarization synthesis based on heterodyne interference. *Opto-Electronic Advances*, Vol. 3, No. 8, pp. 200022–1, 2020.

[48] Fons van der Laan, René Reimann, Andrei Militaru, Felix Tebbenjohanns, Dominik Windey, Martin Frimmer, and Lukas Novotny. Optically levitated rotor at its thermal limit of frequency stability. *Physical Review A*, Vol. 102, No. 1, p. 013505, 2020.

[49] William Fuller Brown. Thermal fluctuations of a single-domain particle. *Phys. Rev.*, Vol. 130, pp. 1677–1686, Jun 1963.

[50] Heinz-Peter Breuer, Francesco Petruccione, et al. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.

[51] Yoshinori Takahashi and Fumiaki Shibata. Spin coherent state representation in

non-equilibrium statistical mechanics. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 38, No. 3, pp. 656–668, 1975.

[52] Hannes Risken. Fokker-planck equation. In *The Fokker-Planck Equation*, pp. 63–95. Springer, 1996.

[53] 太田隆夫. 非平衡系の物理学. 裳華房, 2000.

[54] Jae Sung Lee, Jong-Min Park, and Hyunggyu Park. Thermodynamic uncertainty relation for underdamped langevin systems driven by a velocity-dependent force. *Physical Review E*, Vol. 100, No. 6, dec 2019.

[55] M Matsuo, Y Ohnuma, T Kato, and S Maekawa. Spin current noise of the spin seebeck effect and spin pumping. *Physical review letters*, Vol. 120, No. 3, p. 037201, 2018.

[56] Alexander Roth. *Vacuum technology.* Elsevier, 2012.

[57] Paul S. Epstein. On the resistance experienced by spheres in their motion through gases. *Phys. Rev.*, Vol. 23, pp. 710–733, Jun 1924.

[58] R. M. White. *Quantum Theory of Magnetism.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.